Метод опорных задач по геометрии

Черноусенко Т.И., доцент кафедры ЕМД и ИТ СКИРО ПК и ПРО

Геометрия является самым могущественным средством для изощрения наших умственных способностей и дает нам возможность правильно мыслить и рассуждать

Галилео Галилей,
великий итальянский ученый

- Владение геометрией означает умение решать геометрические задачи
- Алгоритмов решения геометрических задач, вообще говоря, нет
- Верно, наглядно и хорошо выполненный рисунок (чертеж) к задаче – это надежный помощник при ее решении

Мой карандаш бывает еще остроумней моей головы

Леонард Эйлер (1707-1783)

Для успешного решения задач планиметрии необходимо знать и правильно использовать:

- свойства медианы и высоты прямоугольного треугольника, проведенных к гипотенузе
- формулы вычисления площади треугольника:

$S = \frac{1}{2}ab\sin C$; $S = \frac{1}{2}(a+b+c)\cdot r$, *где r – радиус вписанной окружности*;

$S = \sqrt{(p(p-a))(p-b)(h-c)}$, *где p- полупериметр*

$S = \frac{abc}{4R}$, где R- *радиус описанной окружности*

- свойство биссектрисы угла в треугольнике
- теорему о об отрезках касательных, проведенных из данной точки к данной окружности

Необходимо знать и правильно использовать:

- теоремы синусов и косинусов
- теорема о касательной и секущей
- теоремы о вписанном угле, угле с вершиной внутри и вне круга, угле между касательными

Полезные утверждения

Для треугольников

- Отношение площадей двух треугольников, имеющих общее основание (или равные высоты), равно отношению высот (оснований)
- Отношение площадей двух треугольников, имеющих равный угол, равно отношению произведений длин этих треугольников, заключающих этот угол
- Если *AM*- биссектриса треугольника *ABC*, то $\boldsymbol{S_{\Delta ABM}:S_{\Delta ACM}=AB:AC}$

Полезные утверждения

Для трапеции:

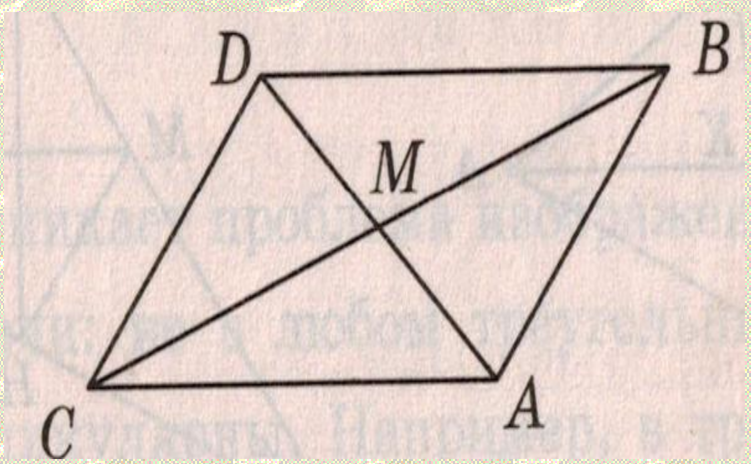
- Если в равнобедренной трапеции ***ABCD (AD|| BC)*** проведена высота СН, ***то*** $AH=\frac{AD+\mathrm{BC}}{2}$***;*** $BH=\frac{AD-BC}{2}$
- Площадь равнобедренной трапеции, диагонали которой взаимно перпендикулярны, равна квадрату ее высоты
- Окружность, описанная около трапеции ***ABCD (AD|| BC) ,***
- Совпадает с окружностью, описанной около треугольника ***ACD***
- Боковая сторона равнобедренной окружности, в которую вписана окружность, равна средней линии трапеции
- Из центра окружности, вписанной в трапецию, боковая сторона трапеции «видна» под прямым углом
- Длина радиуса окружности, вписанной в трапецию, является средней геометрической величиной длин отрезков, на которые делится боковая сторона трапеции точкой ее касания с окружностью

Полезно знать

- Если точки М и Р лежат по одну сторону относительно прямой АВ и $\angle MAB = \angle PAB = \varphi$, то точки M, A, B и P лежат на одной окружности
- Если сумма величин противоположных углов выпуклого четырехугольника равна 180°, то этот четырехугольник вписан в окружность
- Теорема Птолемея: Если около четырехугольника *ABCD* можно описать окружность, то произведение его диагоналей равно сумме произведений противоположных сторон: $AC \cdot BD = AB \cdot DC + AD \cdot BC$

Задача 1. **Найдите площадь ΔABC, если AB=26 см, AC=30 см и длина медианы AM = 14 см**

Решение.



- Достроим ⊿ ABC до параллелограмма ABCД, в котором M –середина AD, тогда AD=28 см, и по формуле Герона находим $S_{\Delta ABD} = \sqrt{42 \cdot 16 \cdot 12 \cdot 14} = 336$, что составляет половину площади параллелограмма *ABCD*, которая, в свою очередь, равна удвоенной площади ΔABC. Поэтому **ΔABC = 336 см²**.

Ответ: **$S_{\Delta ABD}$= 336 см².**

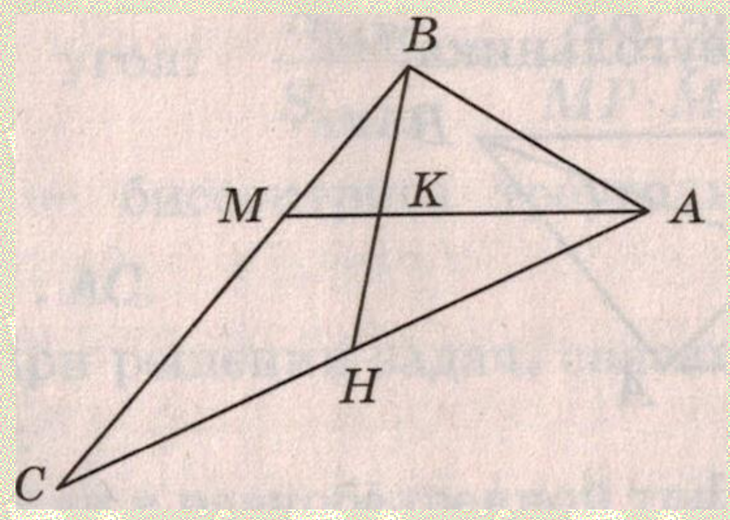
Помните!

Очень важным для «задачного рисунка» является его простота, лаконичность.

Иногда в результате анализа решения задачи приходится отказываться от уже построенного изображения и выполнять новый чертеж, обладающий большей простотой и наглядностью, наиболее верно изображающий расположение фигур в соответствии с условием задачи.

Задача 2. Медиана BH треугольника ABC пересекается с его биссектрисой AM в точке K и делится этой точкой на два равных отрезка. Найдите площадь этого треугольника, если BH=16 см, AM=20 см.

Изобразим ∆ABC в соответствии с условием задачи.



Рассуждаем:

Т.к. K-середина BH и AM-биссектриса $\angle BAC,$ то AK – медиана и биссектриса в ∆ABH. Поэтому ∆ABH-равнобедренный (AB=AH) и AK – его высота.

Видим, что нужен другой чертеж

Задача 2. Решение

Получается совершенно другое изображение ΔABC:

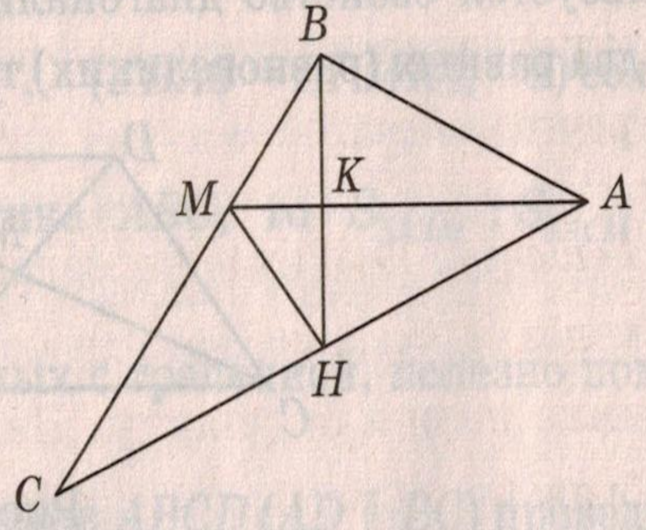


Рис. 3

АК-серединный перпендикуляр отрезка ВН, $BK = \frac{1}{2}BH = 8$ – высота ΔABM. Поэтому:

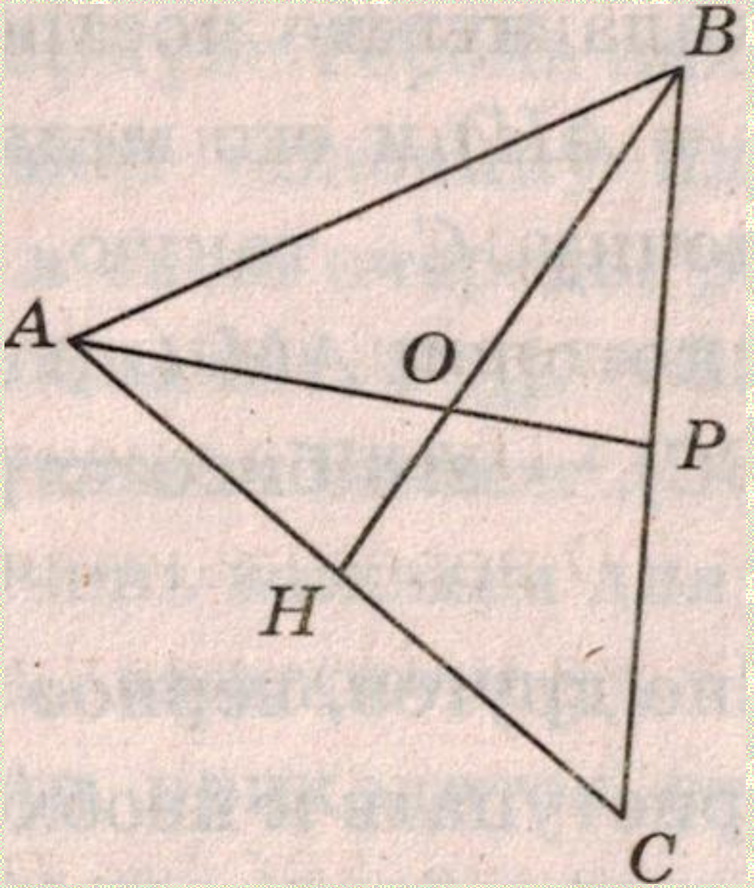
$S_{\Delta ABM} = \frac{1}{2} AM \cdot BK = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 8 = 80.$

Т.к. $AB=AH$ и BH-медиана ΔABC, то $AC=2AB$. По свойству биссектрисы угла в ΔABC имеем $CM:MB=AC:AB=2:1$, значит, $CB:MB=3:1$ и

$S_{\Delta ABC} = 3\, S_{\Delta ABM} = 3 \cdot 80 = 240$ (см^2).

Ответ: *240 (см^2).*

Задача 3. Две медианы треугольника, равные 18 и 24, взаимно перпендикулярны. Найти длину третьей медианы этого треугольника.

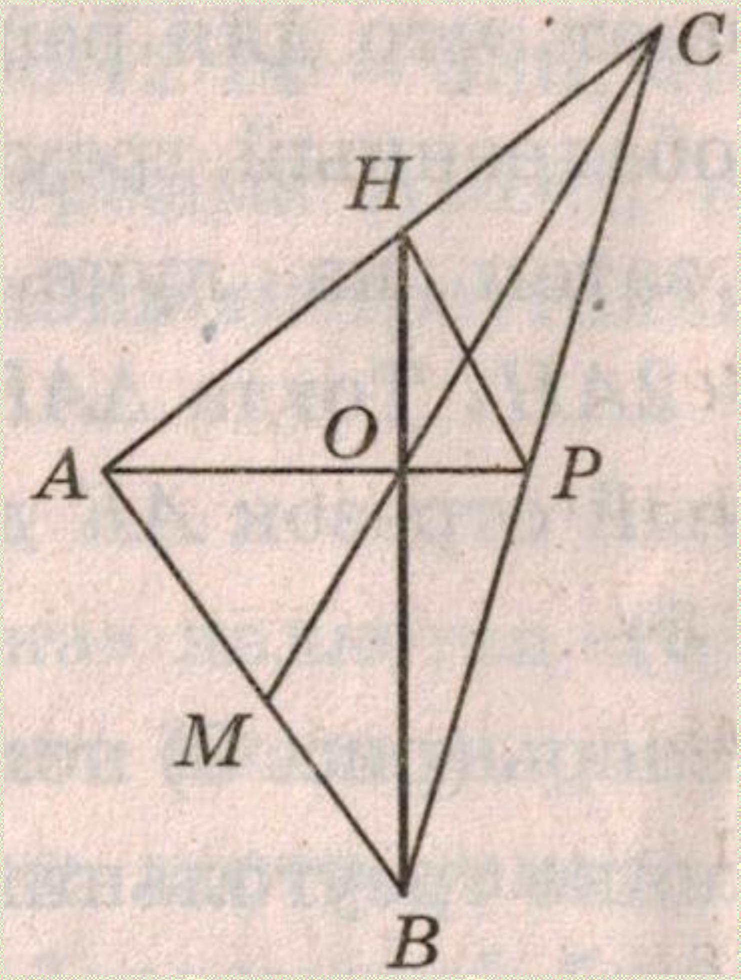


- Анализируем условие задачи для изображения данного треугольника, отвечающего условию.
- На рисунке медианы *AP* и *BH* не взаимно перпендикулярны: изображение неверно.

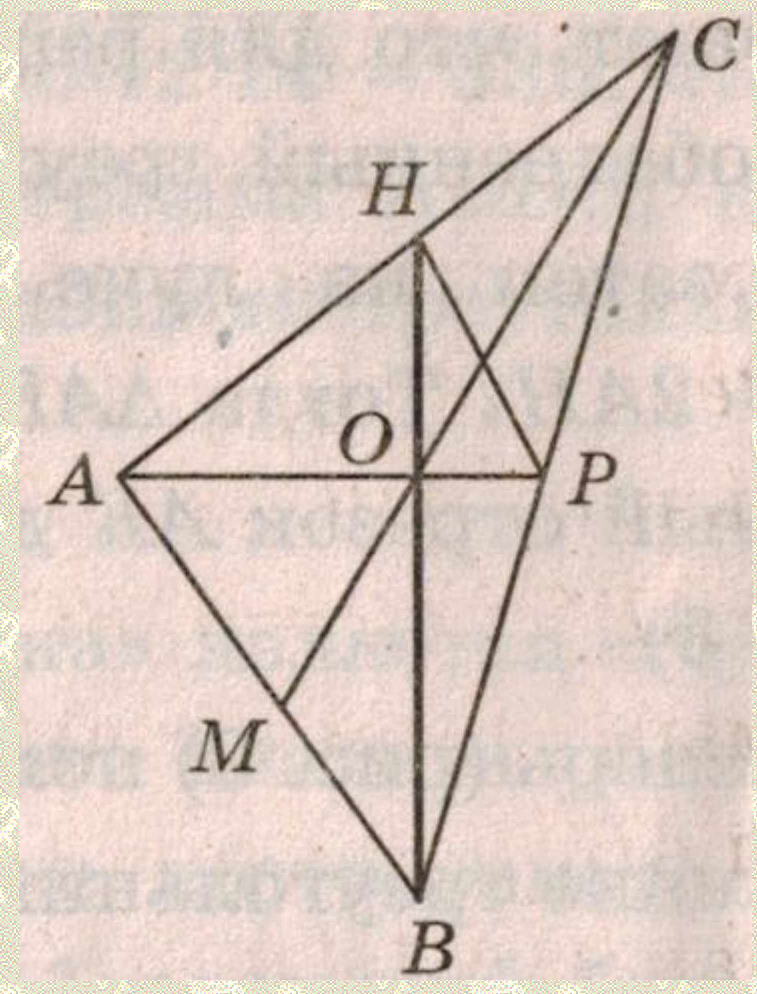
Поэтому искомое изображение треугольника следует начинать, используя условие перпендикулярности его медиан.

Задача 3. Построение чертежа

- Проводим две взаимно перпендикулярные прямые, О - точка их пересечения.
- На одной из этих прямых выбираем точку А и строим точку Р по разные стороны от точки О так, чтобы выполнялось AO:OP=2:1
- Точку Н строим аналогично.
- Принимая точки А и В за вершины заданного треугольника и строим третью вершину $C = AH \cap BP$
- Докажем, что BH и AP – медианы Δ ABC



Задача 3. Решение



$AP=18$, $BH=24$. CM-?

$AO:OP=BO:OH=2:1$ (по свойству медиан в $\triangle ABC$) $\Longrightarrow$

$AO=\frac{2}{3}AP=\frac{2}{3}\cdot 18=12$,

$BO=\frac{2}{3}\ AP=\frac{2}{3}\cdot 24=16$

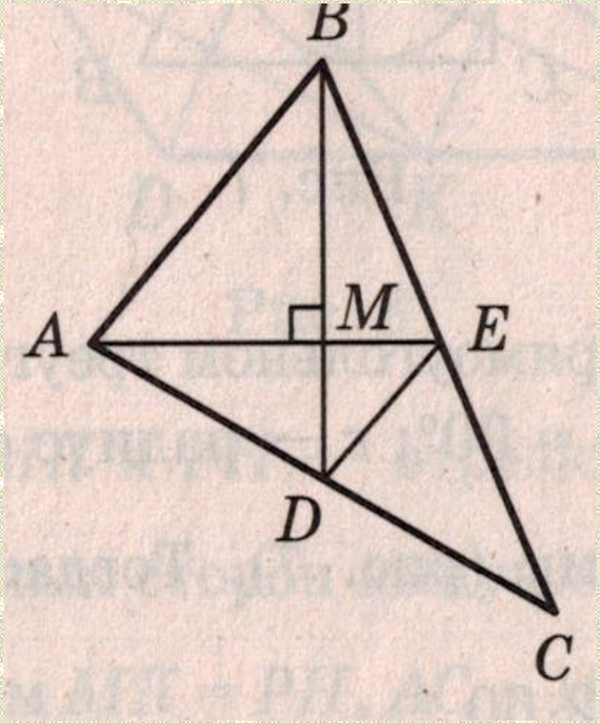
ΔAOB – прямоугольный:

$AB=\sqrt{AO^2+BO^2}=20$ (по т. Пифагора)

OM – медиана ΔAOB, проведенная из вершины прямого угла, $OM=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\cdot 20=10$

Учитывая, что $CO:OM=2:1$, получаем: $CM=3OM=3\cdot 10=30$

Задача 4. Две стороны треугольника равны 6 и 8. Медианы, проведенные к этим сторонам, пересекаются под прямым углом. Найти третью сторону треугольника



Для самостоятельного решения.

Ответ: $2\sqrt{5}$

Выводы

Если в условии задачи речь идет о треугольнике, две медианы которого взаимно перпендикулярны, то рисунок к этой задаче необходимо начинать не с изображения треугольника, в с проведения двух взаимно перпендикулярных прямых, на которых должны быть расположены эти медианы. Дальнейшие построения искомого треугольника нужно выполнять, учитывать свойства медиан треугольника.

Интересный факт

- Известно, что в прямоугольном треугольнике

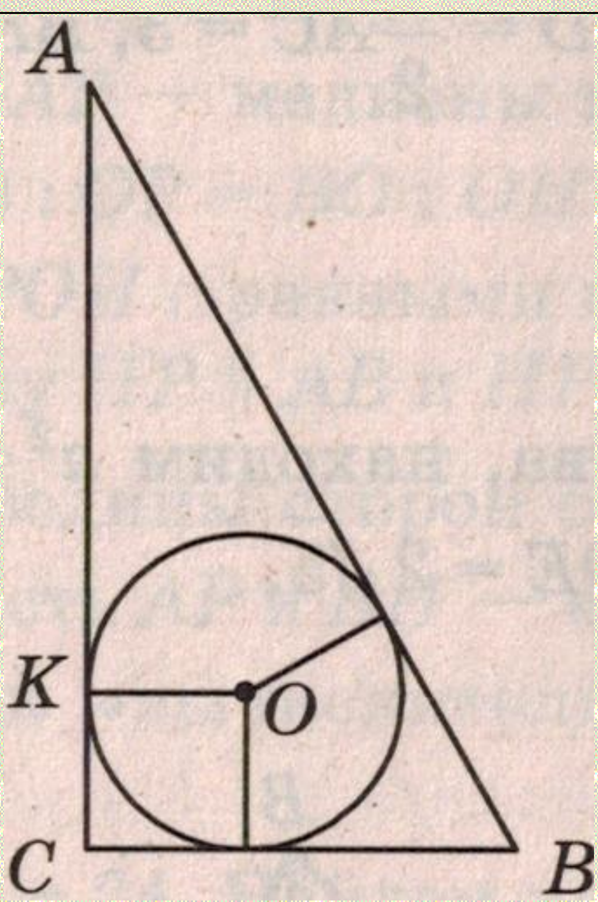
$$r = \frac{a + b - c}{2}$$

Использование этой формулы в сочетании с формулой

$$S = \frac{1}{2}(a+b+c)\cdot r$$

Обеспечивает простое решение целого ряда задач, в той или иной форме связанных с вычислением площади треугольника.

Задача 5. Площадь прямоугольного треугольника равна 60 дм^2, а его периметр равен 40 дм. Найдите катеты треугольника.



Решение

В прямоугольном треугольнике ABC: AC = в, BC = a, AB = c, ∠ABC=90°; r- радиус вписанной окружности.

$S=\frac{1}{2}a\cdot в=60;$

$$r = \frac{a+b-c}{2} = \frac{2S_{\triangle ABC}}{P_{\triangle ABC}} = \frac{2\cdot 60}{40} = 3$$

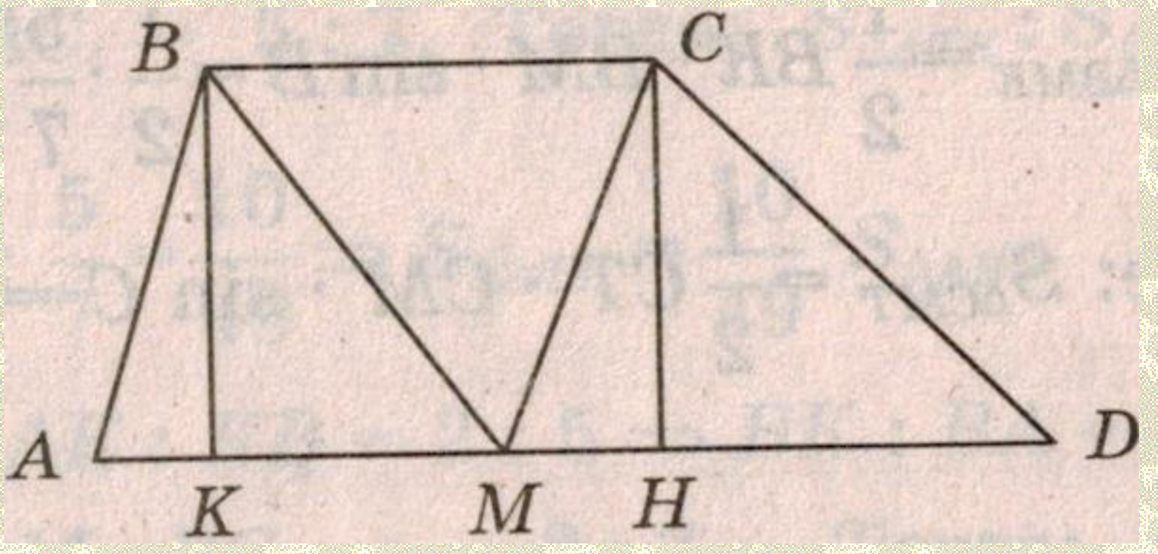
Получаем: $\begin{cases} a + в + c = 40, \\ a + в - c = 6; \end{cases}$ c=17.

$$\begin{cases} ав = 120 \\ a + в = 23. \end{cases}$$

Интересный факт для трапеции(параллелограмма)

Биссектриса угла трапеции (параллелограмма) «отрезает» от трапеции (от параллелограмма) равнобедренный треугольник.

Задача 6. Биссектрисы тупых углов при основании трапеции пересекаются на другом ее основании. Найдите площадь трапеции, если ее высота равна 12 см, а длины биссектрис – 15 см и 13 см.



Решение задачи 6

1. Пусть ВК-высота данной трапеции ABCD (ВК=СН=12); ВМ и СМ – биссектрисы углов $\angle ABC$ и $\angle BCD$; ВМ=15, СМ=13.
2. В прямоугольных треугольниках ВКМ и СНМ по теореме . Пифагора: КМ= 9 см, МН= 5 см.
3. Обозначим: HD=x, АК = у.
4. ВМ- биссектриса ABC:

$\angle \mathrm{ABM} = \angle \mathrm{CBM}$; $\angle \mathrm{CBM} = \angle \mathrm{AMB}$ $(\mathrm{BC}||AD)$ $\Longrightarrow \angle ABM$
$= \angle AMB,$

Значит, $\triangle \mathrm{ABM}$ $-$ равнобедренный, при этом

$\mathrm{AB} = \mathrm{AM} = \mathrm{KM} + \mathrm{AK}$= 9+у.

5. В прямоугольном $\triangle$ABK имеем: $AB^2=AK^2+BK^2$ или

$(9+y)^2=y^2+144 \Longrightarrow y = 3{,}5.$

6. Аналогично CD=16,9

Решение задачи 6(продолжение)

Получаем: AD=AM+MD = 12,5+16,9=29,4

BC=KH= 5+9=14. Теперь находим площадь трапеции:

$S_{ADCD} = \frac{AD+DC}{2} \cdot CH = 260{,}4$ см^2

Ответ:260,4 см^2