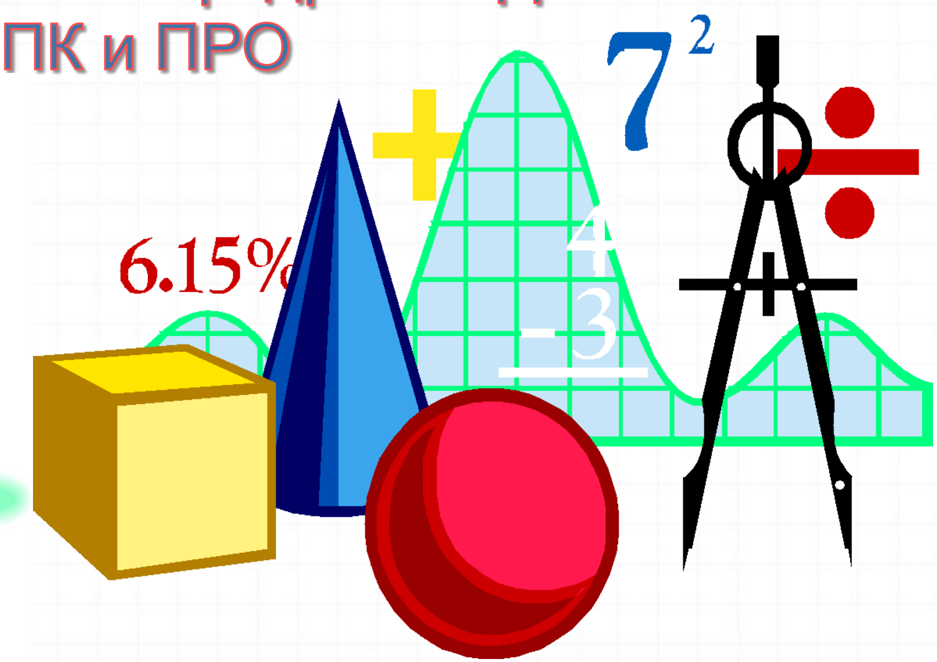
Методы решения планиметрических задач.

Вебинар по подготовке к ОГЭ 20.01.2017 г.

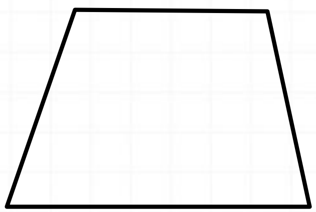
Черноусенко Т.И., доцент кафедры ЕМД и ИТ
СКИРО ПК и ПРО



№	Содержание задания	Познавательная категория	Выполнили верно (%)	
Геометрические фигуры и их свойства			**2015**	2016
	Выбрать из предложенных утверждений верные	Рассуждение	62,4	50,09
Треугольник			**2015**	2016
	Вычисления элементов треугольника на клетчатой бумаге	Практическое применение	23,9	78,49
Многоугольники			**2015**	2016
	Вычисление площади трапеции	Практическое применение	54,9	52,8
Окружность и круг			**2015**	2016
	Вычисление угла треугольника сторона которого проходит через центр окружности.	Знание/понимание	71,0	64,12
Измерение геометрических величин			**2015**	2016
	Нахождение угла	Практическое применение	76,9	71,4

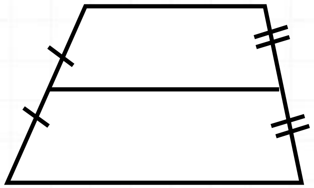
Определение и виды трапеции

Трапецией называется четырехугольник, у которого две противолежащие стороны параллельны, а две другие не параллельны.



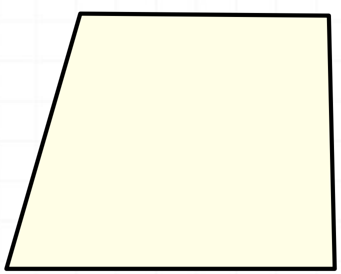
Параллельные стороны трапеции называются ее *основаниями,* а непараллельные стороны — *боковыми сторонами.*

Отрезок, соединяющий середины боковых сторон, называется *средней линией.*



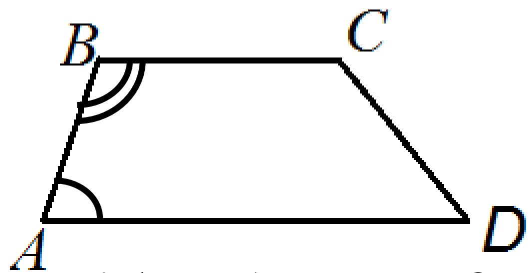
Трапеция называется *равнобедренной* (или *равнобокой*), если ее боковые стороны равны.

Трапеция, один из углов которой прямой, называется *прямоугольной.*



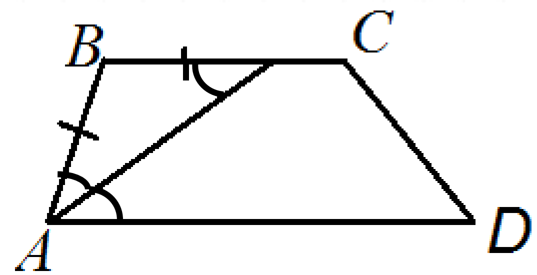
Свойства трапеции

1. Сумма углов, прилежащих к боковой стороне, равна 180^0.

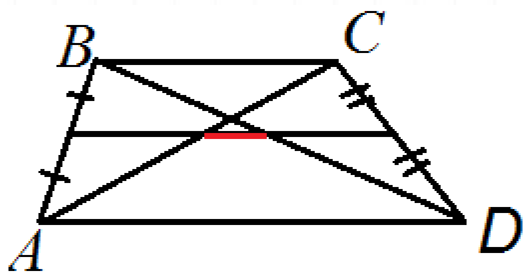


$$\angle A + \angle B = 180°$$

2. Биссектриса угла трапеции, пересекающая второе основание, отсекает от трапеции равнобедренный треугольник.

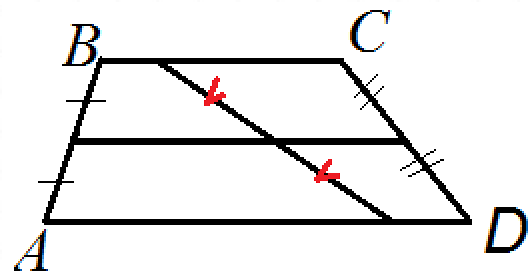


3. Отрезок, соединяющий середины диагоналей, равен половине разности оснований и лежит на средней линии.

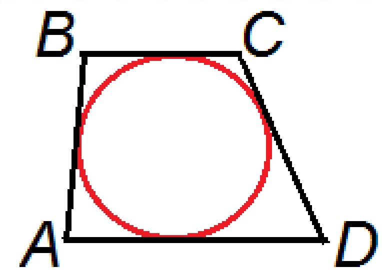


Свойства трапеции

4. Средняя линия трапеции делит любой отрезок с концами, лежащими на прямых, содержащих основания, пополам.

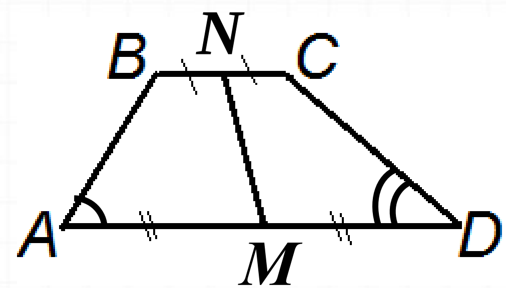


5. В трапецию можно вписать окружность, если сумма оснований трапеции равна сумме её боковых сторон.



$$AB + CD = BC + AD$$

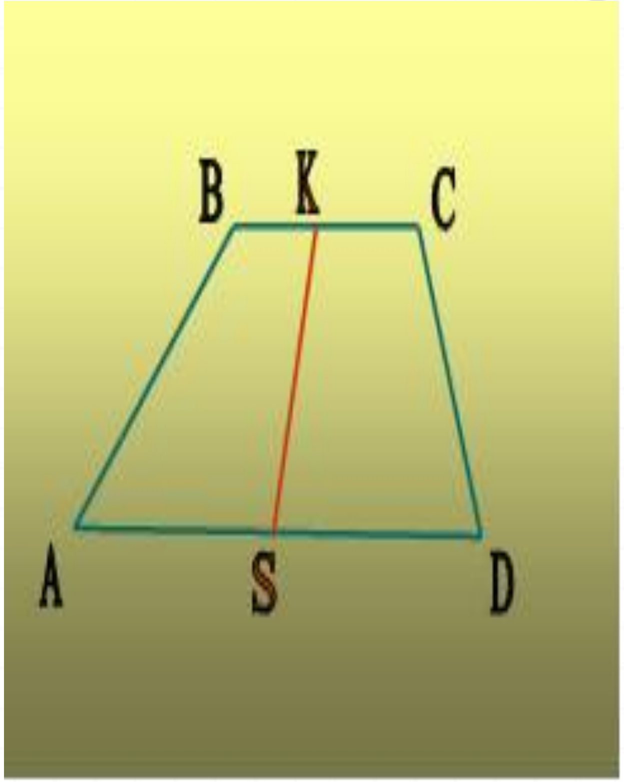
6. Если сумма углов при любом основании трапеции равна 90°, то отрезок, соединяющий середины оснований, равен их полуразности.



$$\angle A + \angle D = 90^\circ$$

$$MN = \frac{AD - BC}{2}$$

Вторая средняя линия трапеции



Вторая средняя линия трапеции – это отрезок, соединяющий середины оснований трапеции

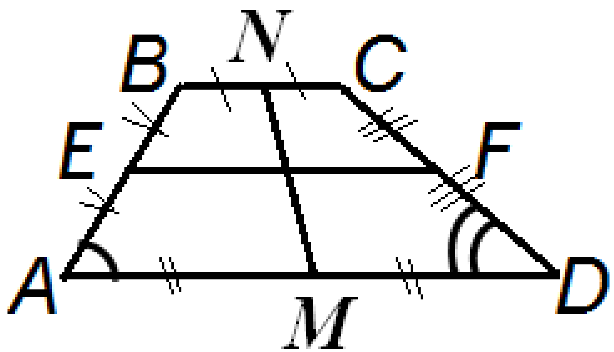
Вторая средняя линия трапеции проходит через точку пересечения диагоналей.

Прямая, содержащая вторую среднюю линию трапеции, проходит через точку пересечения прямых, содержащих боковые стороны.

В равнобедренной трапеции средние линии перпендикулярны.

Задача 1

Углы при одном основании трапеции равны 37^0 и 53^0, отрезки, соединяющие середины противоположных сторон, равны 21 и 12. Найдите основания трапеции. (ОГЭ)



<u>*Дано*</u>: *ABCD*- трапеция, *BC* || *AD*,

$\angle A = 37°, \angle D = 53°$

BN = NC, AM = MD, EF = 21, NM = 12

<u>*Найти*</u>: *BC* и *AD*

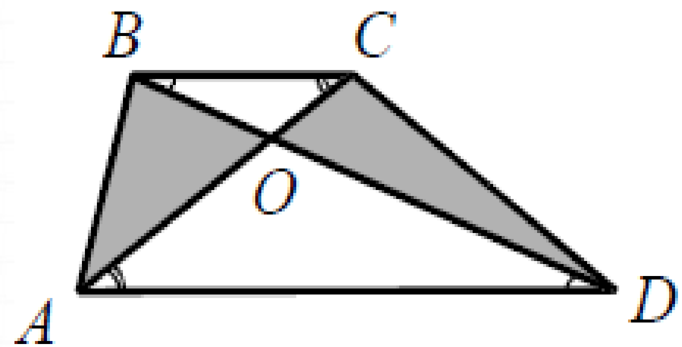
<u>*Решение:*</u>

1. $\angle A + \angle D = 90°$ ⇒ $MN = \frac{1}{2}(AD - BC)$, $EF = \frac{1}{2}(AD + BC)$ ⇒ $\begin{cases} \frac{1}{2}(AD + BC) = 21, \\ \frac{1}{2}(AD - BC) = 12 \end{cases}$

Ответ: *AD* = 33, *BC* = 9

Свойства трапеции

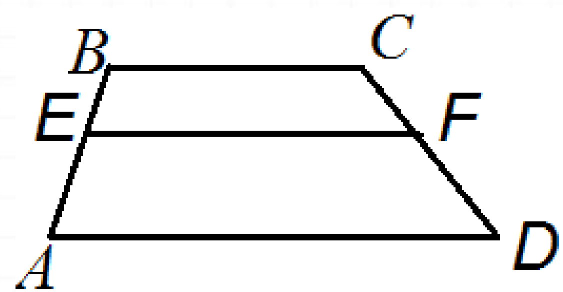
7. Диагонали трапеции разбивают её на четыре треугольника, причём треугольники, прилежащие к основаниям, подобны друг к другу, а треугольники, прилежащие к боковым сторонам, равновеликие, т.е. имеют равные площади.



$\Delta BOC \sim \Delta AOD$,

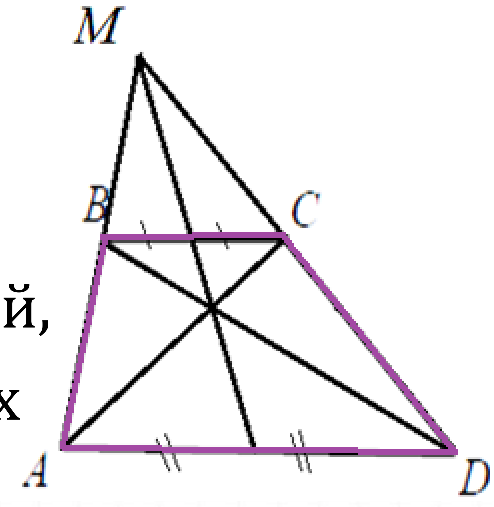
$S_{\Delta AOB} = S_{\Delta COD}$.

8. Отрезок разбивающий трапецию на две подобные трапеции, имеет длину равную среднему геометрическому длин оснований.



$$EF = \sqrt{BC \cdot AD}$$

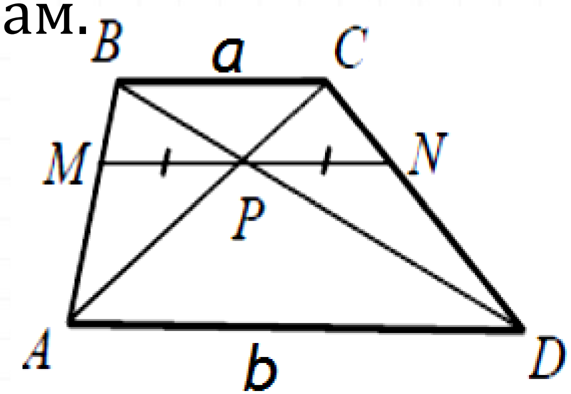
Свойства трапеции



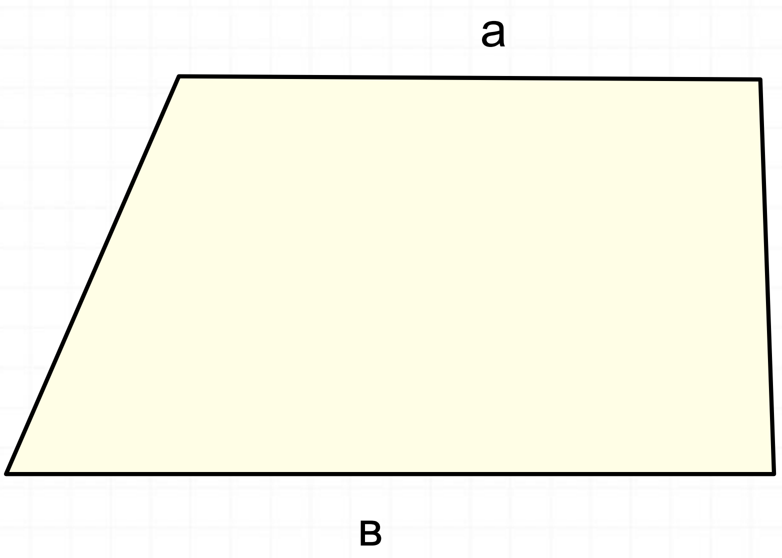
9. В любой трапеции следующие четыре точки лежат на одной прямой: середины оснований, точка пересечения диагоналей, точка пересечения продолжений боковых сторон.

10. Отрезок, параллельный основаниям трапеции, походящий через точку пересечения диагоналей и соединяющий две точки на боковых сторонах, делится точкой пересечения диагоналей пополам.

   Его длина есть среднее гармоническое оснований трапеции: $MN = \dfrac{2ab}{a+b}$



Среднее гармоническое



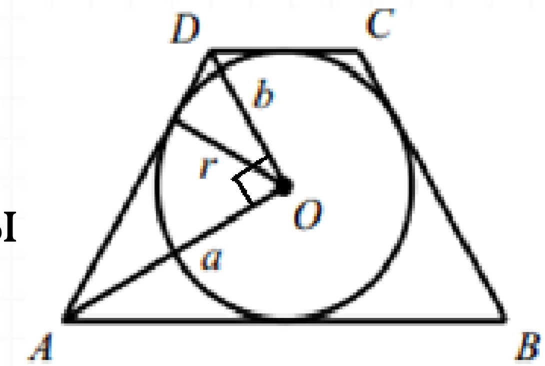
Средняя гармоническая величина (или **Среднее гармоническое**) получается от деления числа данных величин на сумму величин обратных данным/

Для чисел $\boldsymbol{a}$ и b

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \frac{2}{\frac{b+a}{ab}} = \frac{2ab}{a+b}$$

Свойства трапеции

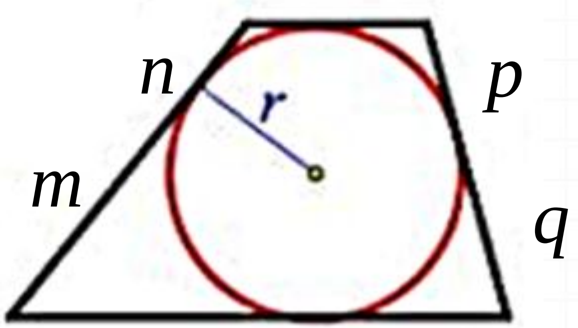
11. Если в трапецию вписана окружность, то отрезки, соединяющие центр окружности с концами боковой стороны трапеции, перпендикулярны.



$$r=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

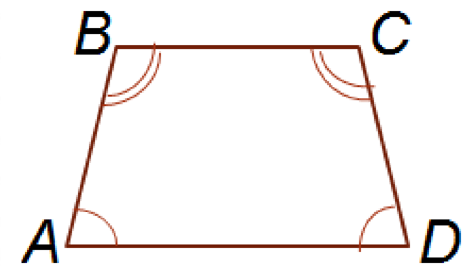
12. Если в трапецию вписана окружность и m, n, p, q- длины отрезков боковых сторон от точек касания до вершин, то для вычисления радиуса вписанной в неё окружности можно использовать формулы:

$$r=\sqrt{mn}=\sqrt{pq}.$$

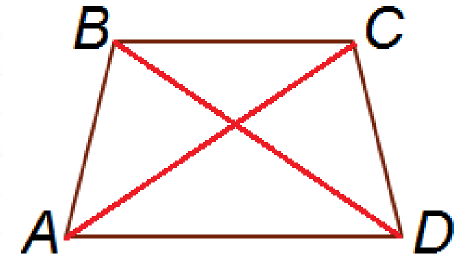


Свойства равнобедренной трапеции

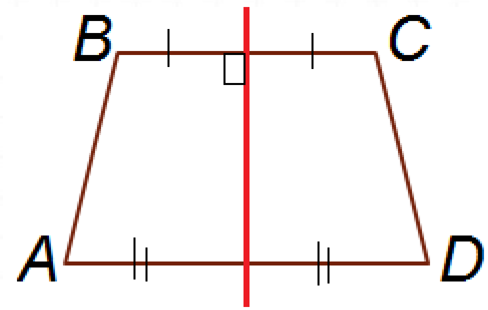
1. В равнобедренной трапеции углы при любом основании равны.



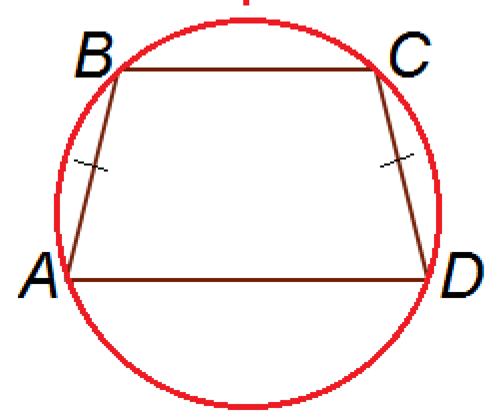
2. В равнобедренной трапеции длины диагоналей равны.



3. В равнобедренной трапеции, прямая, проходящая через середины оснований, перпендикулярна основаниям и является осью симметрии трапеции.

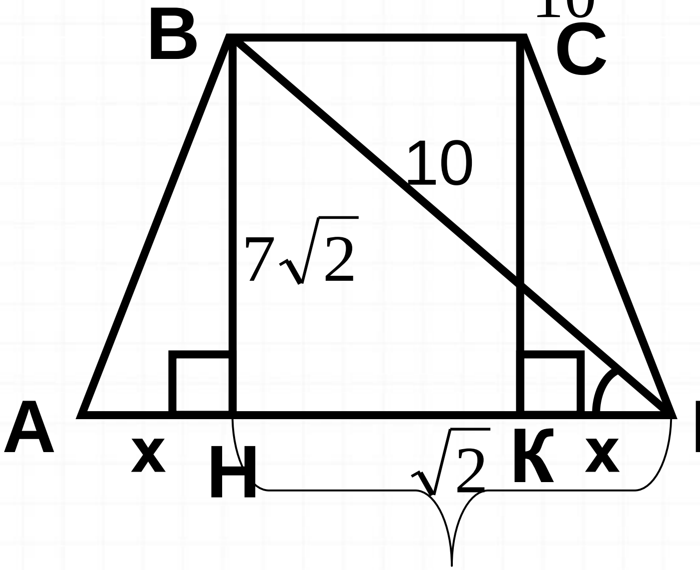


4. Если трапецию можно вписать в окружность, то она равнобедренная.



Задача 2

Найдите площадь равнобедренной трапеции, если её диагональ, равная 10, образует с основанием угол, косинус которого равен $\frac{\sqrt{2}}{10}$. (ОГЭ)



<u>Дано</u>: $ABCD$ - трапеция, $AD \parallel BC$

$\cos BDH = \frac{\sqrt{2}}{10}$, $BD = 10$

<u>Найти:</u> S

<u>План решения</u>: $S = mh$

1) $HD = \sqrt{2}$;

2) $BH = 7\sqrt{2}$;

3) $AH = KD = x$, $m = \frac{BC + AD}{2}$,

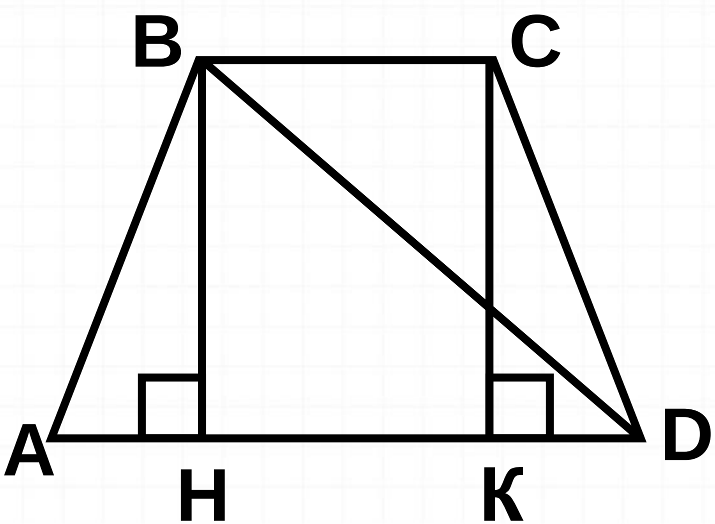
$$m = \frac{AD - 2x + AD}{2} = \frac{2AD - 2x}{2} = AD - x = HD = \sqrt{2}$$

4) S = $\sqrt{2} \cdot 7\sqrt{2} = 14$

Ответ: 14

Свойство 5

В равнобедренной трапеции проекция диагонали на большее основание равна средней линии трапеции.



Дано: $ABCD$- трапеция, $BC \parallel AD$, $AB = CD, BH \perp AD$, BD- диагональ

Доказать: $HD = \dfrac{AD + BC}{2}$

Доказательство:

1) Опустим высоту CK.

2) $AH = \dfrac{AD - HK}{2}$;

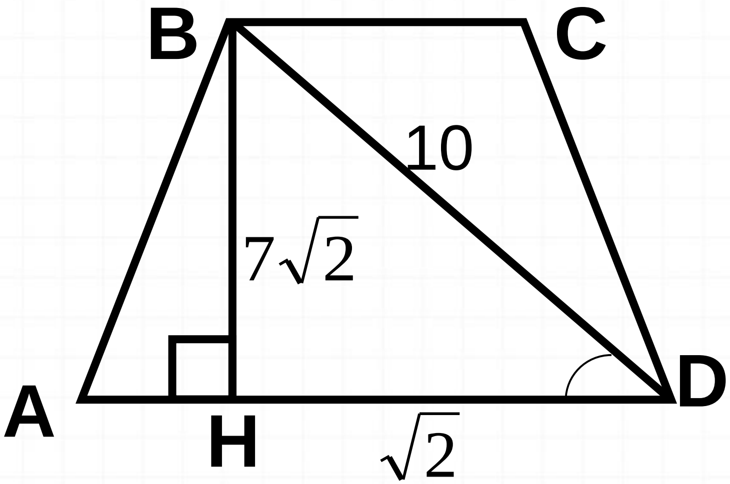
3) $HD = AD - AH$,

$$HD = AD - \frac{AD - BC}{2},$$

$$\boxed{HD = \frac{AD + BC}{2}.}$$

Другое решение задачи 2

Найдите площадь равнобедренной трапеции, если её диагональ, равная 10, образует с основанием угол, косинус которого равен $\frac{\sqrt{2}}{10}$.



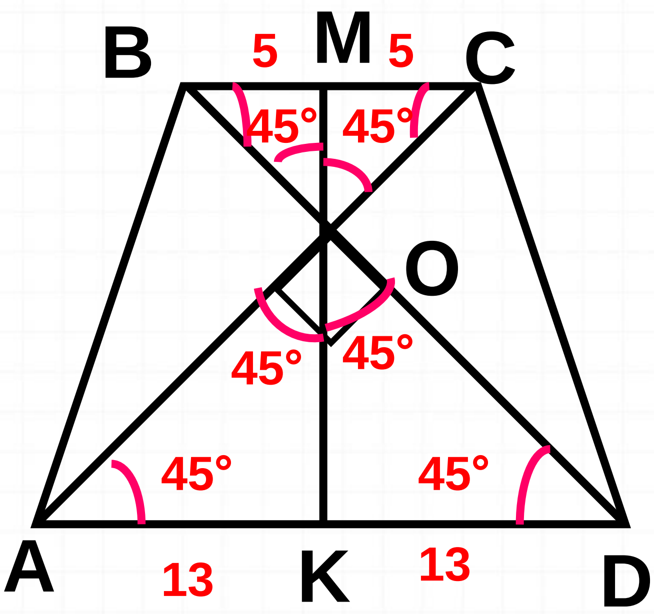
Дано: $ABCD$ - трапеция,
$AD \parallel BC$
$\cos BDH = \frac{\sqrt{2}}{10}$, $BD = 10$
Найти: S

План решения: $S = mh$
1) $HD = \sqrt{2}$;
2) $BH = 7\sqrt{2}$;
3) $S = \sqrt{2} \cdot 7\sqrt{2} = 14$

Ответ: 14

Задача 3

В равнобедренной трапеции диагонали взаимно перпендикулярны. Найдите площадь трапеции, основания которой равны 10 и 26. (ГИА)



<u>Дано</u>: *ABCD*- трапеция, *AD* || *BC*, *AB* = *CD*, *AD* = 26, *BC* = 10, $AC \perp BD$

<u>Найти:</u> S

<u>План решения:</u> S = mh

1) $m = \dfrac{AD + BC}{2}$

2) Проведём высоту *МК*;

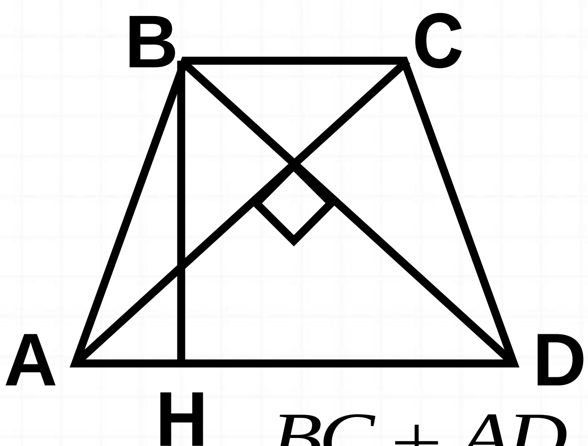
3) AK =OK = 13, BM = MO = 5, MK = 18

4) $S = \dfrac{AD + BC}{2} \cdot MK,$ $\quad S = \dfrac{10 + 26}{2} \cdot 18 = 18 \cdot 18 = 324$

Ответ: S = 324.

Свойство 6

Если в равнобедренной трапеции диагонали взаимно перпендикулярны, то её высота равна средней линии.



<u>Дано</u>: ABCD- трапеция, BC || AD, AB = CD, AC $\perp$ BD, BH – высота

<u>Доказать:</u> $BH = \frac{BC+AD}{2}$

<u>Доказательство:</u>

$$S = \frac{1}{2}BD^2, S = \frac{BC+AD}{2}\cdot BH,$$

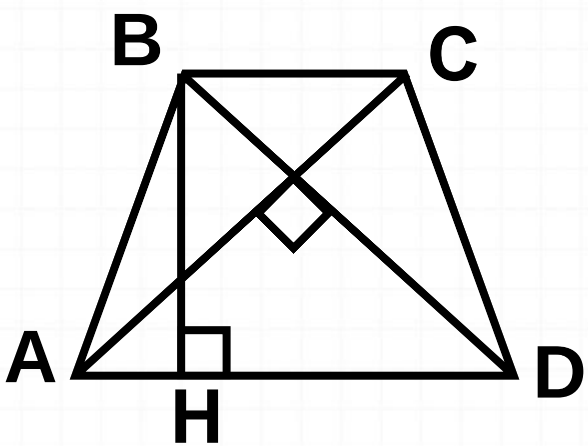
$$\frac{1}{2}BD^2 = \frac{BC+AD}{2}\cdot BH, \quad HD = \frac{BC+AD}{2},$$

$$\frac{1}{2}\left(BH^2 + HD^2\right) = HD\cdot BH, BH^2 + HD^2 - 2HD\cdot BH = 0,$$

$$(BH - HD)^2 = 0, \quad BH = HD, \quad BH = \frac{BC+AD}{2}$$

Свойство 7

Площадь равнобедренной трапеции, диагонали которой взаимно перпендикулярны, равна квадрату её высоты, т.е. $S = h^2$.



<u>*Дано*</u>: *ABCD* – трапеция, *BC* || *AD*, *AB* = *CD*, *BH* – высота трапеции

$AC \perp BD$

<u>Доказать</u>: $S = BH^2$

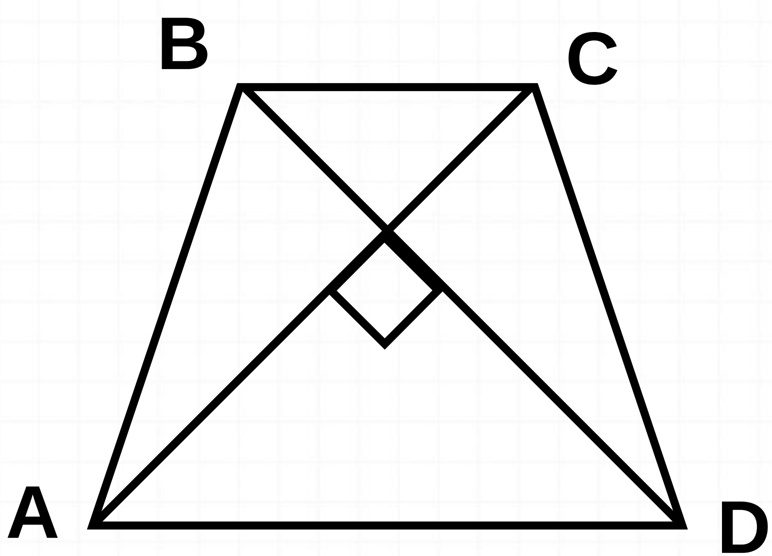
<u>*Доказательство*</u>:

$$S = \frac{BC + AD}{2} \cdot BH, \qquad BH = \frac{BC + AD}{2}$$

$$\boxed{S = BH^2}$$

Другое решение задачи 3

В равнобедренной трапеции диагонали взаимно перпендикулярны. Найдите площадь трапеции, основания которой равны 10 и 26.



Дано: $ABCD$- равнобедренная трапеция, $AD \parallel BC$, $AD = 26$, $BC = 10$, $AC \perp BD$

Найти: S

Решение: $S = h^2$,

$h = m$, $S = m^2$,

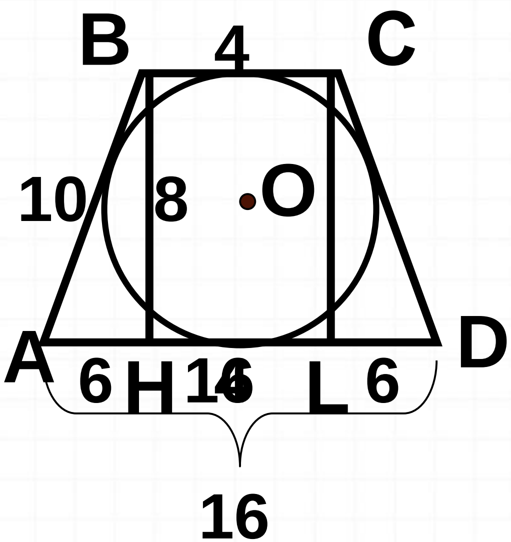
$$m = \frac{BC + AD}{2}, m = \frac{10 + 26}{2} = 18$$

$S = 18^2 = 324$.

Ответ: 324

Задача 4

Найдите радиус окружности, если основания описанной около неё равнобедренной трапеции равны 4 см и 16 см. (ГИА)



Дано: окр.($O;r$) вписана в трапецию $ABCD$

$AD \parallel BC$, $AB = CD$

$AD = 16$ см, $BC = 4$ см

Найти: r

План решения: $r = \frac{1}{2} h$

1) $AB = 10$;

2) $AH = 6$;

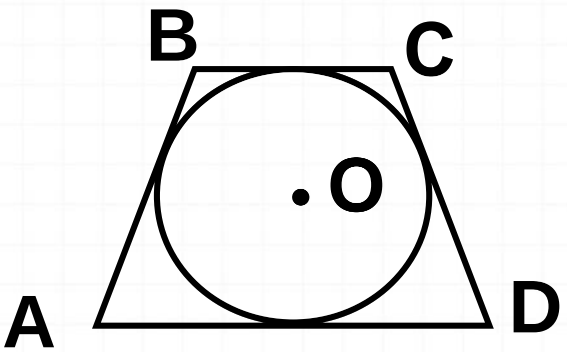
3) $BH = 8$;

4) $r = 4$

Ответ: 4

Свойство 8

Если в равнобедренную трапецию вписана окружность, то её боковая сторона равна средней линии трапеции.



Дано: окр.(O ; r) вписана в трапецию $ABCD$, $AD \parallel BC$

Доказать: $$AB = \frac{AD + BC}{2}$$

Доказательство:

по свойству четырёхугольника, описанного около окружности:

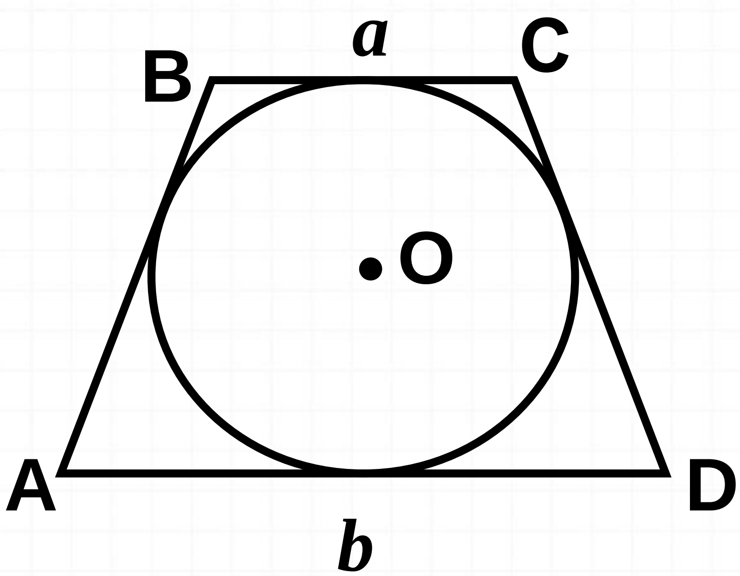
$AB + CD = AD + BC$, $AB = CD$,

$2AB = AD + BC$,

$$AB = \frac{AD + BC}{2}$$

Свойство 9

Высота равнобедренной трапеции, в которую можно вписать окружность, является средним геометрическим её оснований: $h^2 = a \cdot b$.



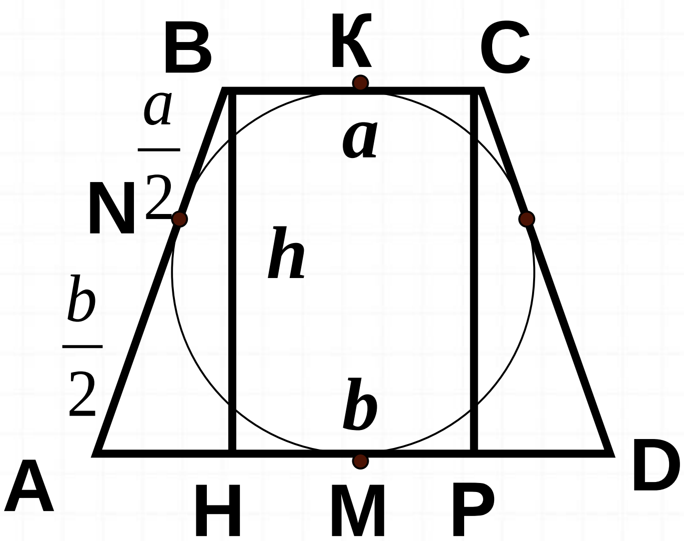
Дано: окр.(O ; r) вписана в трапецию $ABCD$

$AD \parallel BC$

$AB = CD$, $BC = \mathbf{a}$, $AD = b$,

h – высота трапеции

Доказать: $h^2 = a \cdot b$



__Доказательство:__

1)По свойству отрезков касательных, проведённых из одной точки к окружности:

$$AM = AN = \frac{b}{2},\ BN = BK = \frac{a}{2}$$

2)Проведём высоту BH и рассмотрим

$$\Delta ABH,\ \angle H = 90^\circ,\ BH = h$$

$$AH = \frac{b-a}{2},\ AB = \frac{a+b}{2},$$

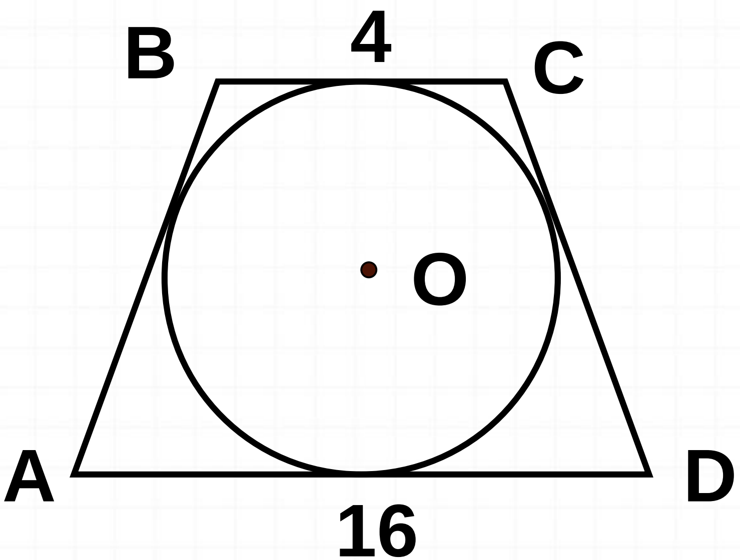
По т. Пифагора: $AB^2 = AH^2 + BH^2$

$$h^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a+b-b+a}{2}\right)\left(\frac{a+b+b-a}{2}\right)$$

$$h^2 = \frac{2a}{2}\cdot\frac{2b}{2} = \frac{4ab}{4}$$

$$\boxed{h^2 = ab}$$

Другое решение задачи 4



<u>*Дано*</u>: окр.(O;r) вписана в трапецию *ABCD*

$AD \parallel BC$, $AB = CD$

$AD = 16$ см, $BC = 4$ см

<u>*Найти:*</u> *r*

<u>*Решение:*</u> $r = \frac{1}{2}h,$

$$h^2 = a \cdot b$$

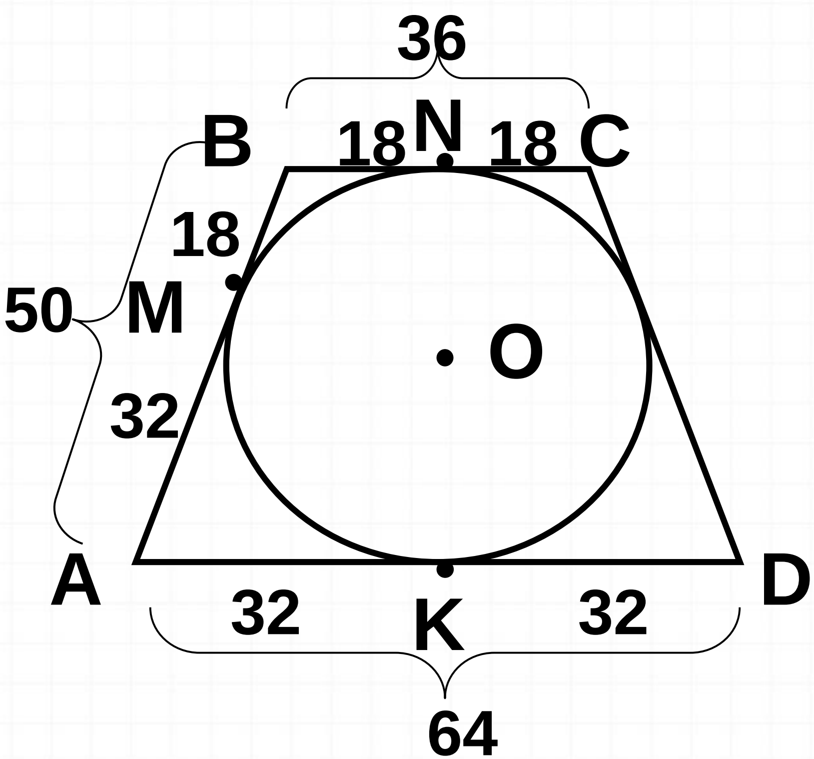
$$h = \sqrt{16 \cdot 4} = 4 \cdot 2 = 8 \text{ (см)}$$

$$r = \frac{1}{2} \cdot 8 = 4 \text{ (см)}$$

Ответ: $r = 4$ см

Задача 5

Равнобедренная трапеция описана около круга. Боковая сторона трапеции делится точкой касания на отрезки длиной 18 и 32. Найдите площадь трапеции. (ГИА)



Дано: окр.$(O\ ;\ r)$ вписана в трапецию $ABCD$

$AD \parallel BC, AB = CD, M \in AB$

$AM = 32, MB = 18$

Найти: S_{ABCD}

План решения:

$S=mh$

1) $AB=m=50$;

2) $BC=36$;

3) $AD=64$;

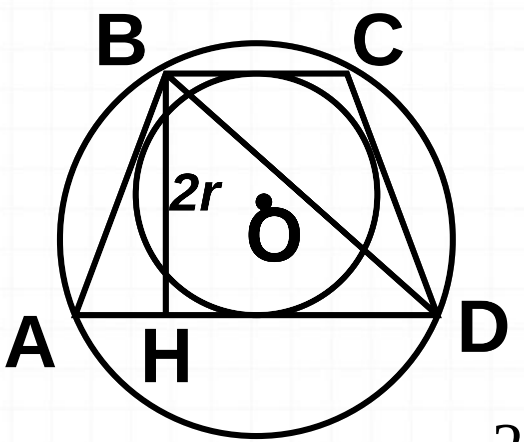
4) $h=\sqrt{a \cdot b}, h=\sqrt{36 \cdot 64}=48$;

5) $S = 50 \cdot 36 = 1800$

Ответ:1800

Задача 6

Около круга радиуса r описана равнобедренная трапеция. Боковая сторона трапеции составляет с меньшим основанием угол α. Найдите радиус круга, описанного около трапеции.



<u>*Дано*</u>: *ABCD*- трапеция, *AD* || *BC*, описанная около окр.(O; r) и вписанная в окр.(O_1;R) $AB = CD, \angle B = \alpha$

<u>*Найти:*</u> R

<u>*Решение:*</u> по теореме синусов $\boxed{2R = \dfrac{BD}{\sin A}}$

$$1).\angle A = 180^\circ - \alpha, \sin A = \frac{BH}{AB}, AB = \frac{BH}{\sin A} = \frac{2r}{\sin\alpha},$$

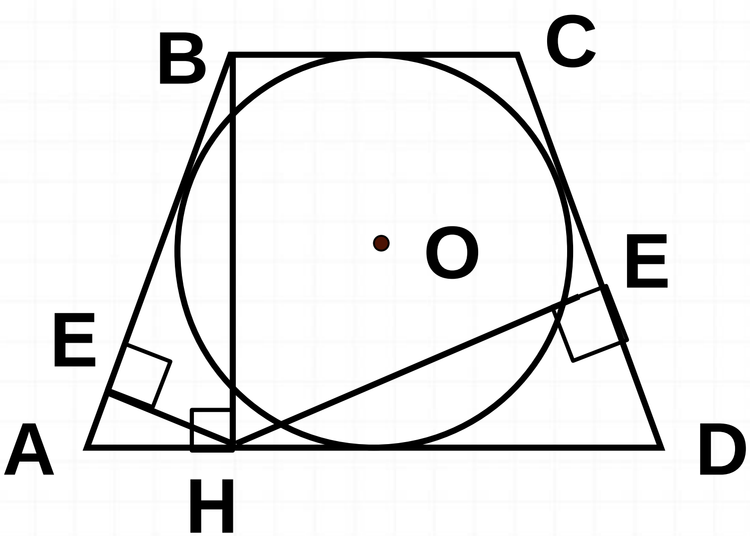
$$2).AB = HD, HD = \frac{2r}{\sin\alpha};$$

$$3).BD^2 = BH^2 + HD^2, \quad BD = \sqrt{(2r)^2 + \left(\frac{2r}{\sin\alpha}\right)^2} = \frac{2r\sqrt{1+\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}$$

$$4).R = \frac{BD}{2\sin\alpha} \qquad R = \frac{r\sqrt{1+\sin^2\alpha}}{\sin^2\alpha}$$

Задача 7

В описанной около окружности равнобокой трапеции основания относятся как 3 : 5. Из вершины меньшего основания опущена высота на большее основание; точка H – основание высоты. Из точки H опущен перпендикуляр HE на боковую сторону трапеции. В каком отношении точка E делит боковую сторону? (ЕГЭ, С4)



<u>*Дано*</u>: окр.(O ; r) вписана в трапецию $ABCD$

$AD \parallel BC$, $AB = CD$, $BC : AD = 3 : 5$

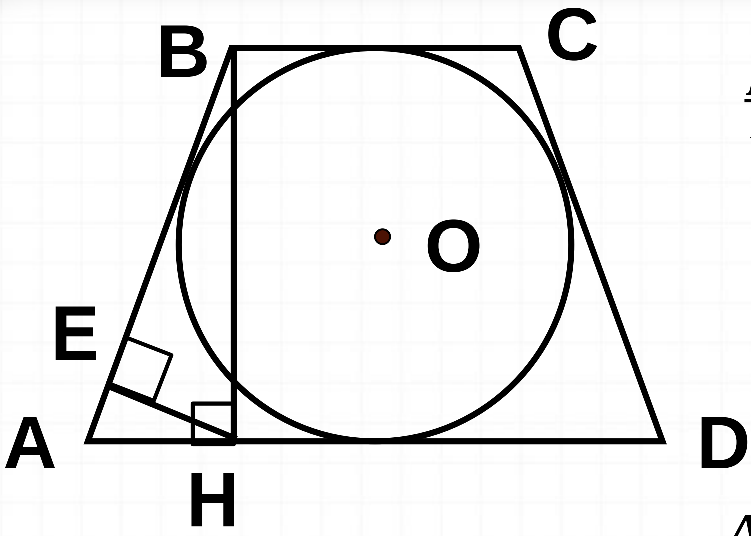
$BH \perp AD$,

а) $HE \perp AB$;

б) $HE \perp CD$

<u>*Найти*</u>: а) $AE : EB$

б) $DE : EC$



Решение: а)

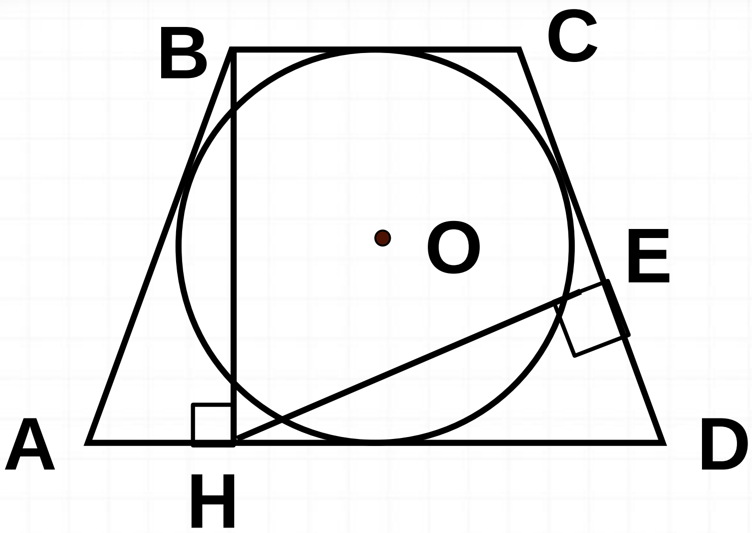
1. Пусть k- коэффициент пропорциональности, тогда $BC = 3k, AD = 5k$.
Т.к. $BH = \sqrt{BC \cdot AD}$,
то $BH = k\sqrt{15}$

$$AH = \frac{AD - BC}{2} = k, \quad HD = AB = \frac{AD + BC}{2} = 4k$$

2. $\Delta AEH \sim \Delta HEB$ (по двум углам)

$$\frac{AE}{HE} = \frac{HE}{EB} = \frac{AH}{BH} = \frac{k}{k\sqrt{15}} = \frac{1}{\sqrt{15}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{AE}{HE} = \dfrac{1}{\sqrt{15}}, \quad HE = AE\sqrt{15}, \\ \dfrac{EH}{EB} = \dfrac{1}{\sqrt{15}}, \quad HE = \dfrac{EB}{\sqrt{15}} \end{array}\right\} \Rightarrow AE\sqrt{15} = \frac{EB}{\sqrt{15}} \Rightarrow \frac{AE}{EB} = \frac{1}{15}$$



Решение: б)

3. $\Delta ABE = \Delta DHE$ (по гипотенузе и острому углу)

$$AB = HD = 4k$$

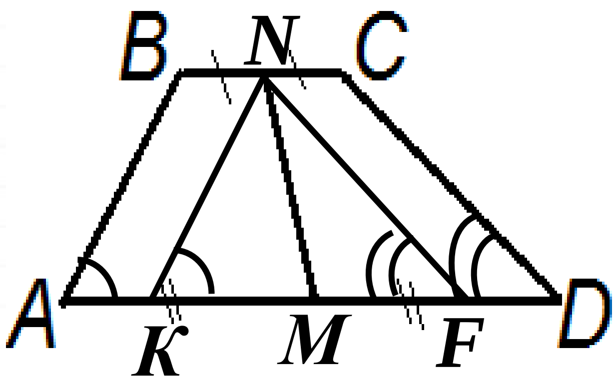
$$\left.\begin{aligned} AH &= DE = k \\ CE &= CD - DE \\ CE &= 3k \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{DE}{EC} = \frac{1}{3}$$

Ответ: а) 1 : 15; б) 1 : 3.

Литература

- Сборник задач по математике для поступающих в вузы. Геометрия/ Под ред. М.И.Сканави.- М.: Издательский дом ОНИКС: Альянс-В, 1999.
- Зив Б.Г. ,Мейлер В.М. , Баханский А.Г. . Задачи по геометрии для 7-11 классов -М.: Просвещение, 1991.
- Денищева Л.О., Глазков Ю.А., Краснянская К.А. и др. Учебно-тренировочные материалы для подготовки к единому государственному экзамену. Математика.- М: Интеллект-Центр, 2003-2008.
- Кочагин В.В., Бойченко Е.М., Глазков Ю.А. и др. ЕГЭ- 2008: математика: реальные задания.- М.: АСТ: Астрель, 2008.
- Ковалева Г.И., Бузулина Т.И., Безрукова О.Л., Розка Ю.А. Математика. Тренировочные тематические задания повышенной сложности с ответами для подготовки к ЕГЭ и к другим формам выпускного и вступительного экзаменов.- Волгоград: Учитель, 2007.
- Симонов А.Я., Бакаев Д.С., Эпельман А.Г. и др. Система тренировочных задач и упражнений по математике.- М.: Просвещение, 1991.
- Мерзляк А.Г., Полонский В.Б., Рабинович Е.М., Якир М.С. Сборник задач и контрольных работ по геометрии для 8 класса.- М.: Илекса, Харьков: Гимназия, 1999.
- Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф. и др. Геометрия: Учеб. для 7-9 кл. сред.шк.- М.: Просвещение, 20014.
- Математика ЕГЭ- 2015. Вступительные испытания.Под ред. Ф.Ф.Лысенко.- Ростов-на-Дону: Легион, 2008.
- Прокофьев А.А., Корянов А.Г. Планиметрические задачи с неоднозначностью в условии (многовариантные задачи) (типовые задания С4)
- http://www-formula.ru/index.php/2011-09-19-02-39-24/trapeze-area
- http://isu.ru/ru/egevic/mathematics/planimetry/opornye_zadachi_planimetrii.pdf

Свойство 6



Дано: $ABCD$ $(AD \parallel BC)$, $BN = NC$, $AM = MD$, $\angle A + \angle D = 90^\circ$

Док-ть: $MN = \dfrac{AD - BC}{2}$

Док-во:

1) Построим $NK \parallel AB$ и $NF \parallel CD$, $ABNK$ и $NCDF$ - параллелограммы

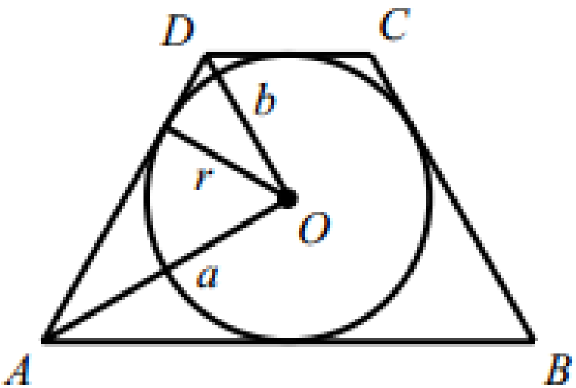
2) $\angle A = \angle NKM$ (соответственные при $AB \parallel NK$ и секущей АК); $\angle D = \angle NFM$ (соответственные при $CD \parallel NF$ и секущей АК) ⇒ $\angle NKM + \angle NFM = 90^\circ$

3) В $\Delta\, KNF$: $\angle NKM + \angle NFM = 90^\circ$ ⇒ $\angle KNM = 90^\circ$ ⇒ $\Delta\, KNF$ –прямоугольный, MN - медиана ⇒ $MN = \dfrac{1}{2} KF$,

где $KF = AD - (AK + FD) = AD - BC$ ⇒ $MN = \dfrac{AD - BC}{2}$

Свойство 10

Если в трапецию $ABCD$ вписана окружность с центром O, то $r=\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$, где $OA = a$ и $OD = b$.



<u>Дано</u>: окр.(O ; r) вписана в трапецию $ABCD$

$AD \parallel BC$, $OA = a$,

$OD = b$

<u>Док-ть</u>: $r=\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$,

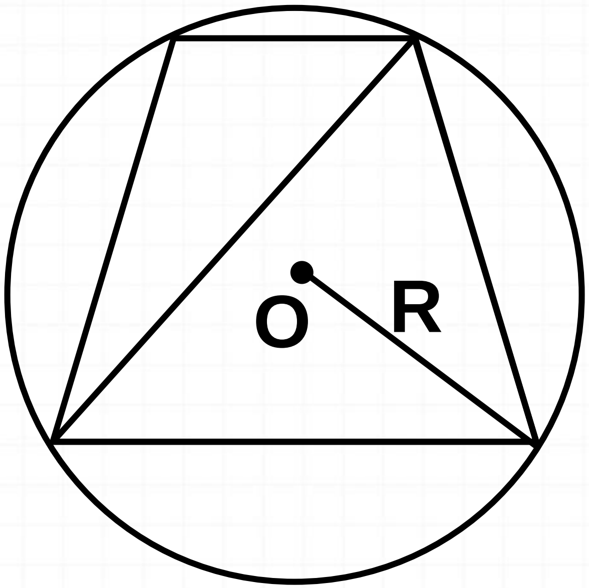
<u>Док-во</u>:

1) $AO \perp OD$;

2) $S_{AOD}=\dfrac{1}{2}ab, S=\dfrac{1}{2}r\sqrt{a^2+b^2}$

$$\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}r\sqrt{a^2+b^2} \Rightarrow r=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Описанная окружность



Радиус окружности, описанной около трапеции, равен радиусу окружности, описанной около треугольника, вершины которого лежат в вершинах данной трапеции.