# Метод усложняющих упражнений

**Вебинар №5    22.01 2016 г.**

**Т.И.Черноусенко, доцент кафедры ЕМД и ИТ СКИРО ПК и ПРО**

**Задача. В правильной треугольной пирамиде сторона основания *a* равна 6 и высота пирамиды *h* равна 8. Найти:**

1. Высоту ***h*** треугольника, лежащего в основании пирамиды; его площадь $S_{осн.}$; радиус $r_в$ окружности, вписанной в основание; радиус $r_o$ окружности, описанной около основания; объем пирамиды $V$

2. Боковое ребро ***l*** и апофему пирамиды $h_1$; площадь боковой грани $S_{бг}$ и площадь боковой поверхности пирамиды $S_{бп}$; радиус $r_{в1}$ окружности, вписанной в боковую грань; радиус $r_{o1}$ окружности, описанной около боковой грани

3. Плоский угол $\alpha$ при вершине пирамиды

4. Угол $\beta$ между боковым ребром и стороной основания

5. Угол $\varphi$ между боковым ребром и плоскостью основания

6. Двугранный угол $\psi$, образованный боковой гранью и плоскостью основания пирамиды

7. Двугранный угол $\gamma$, образованный двумя боковыми гранями пирамиды

8. Радиус $R_в$ сферы, вписанной в пирамиду

9. Радиус $R_o$ сферы, описанной около пирамиды

10. Расстояние $d_1$ от центра основания до боковой грани

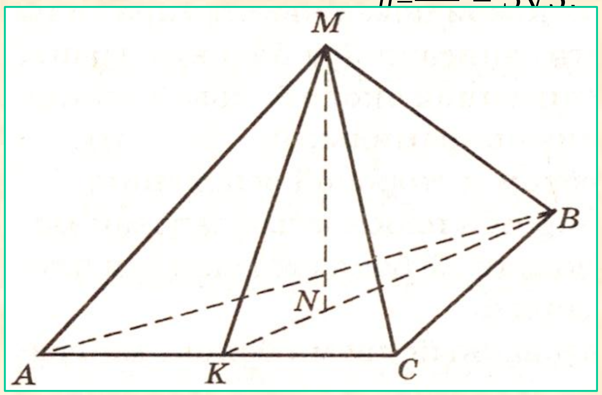
11. Угол ***l*** и расстояние $d_2$ между боковым ребром и скрещивающейся с ним стороной основания пирамиды

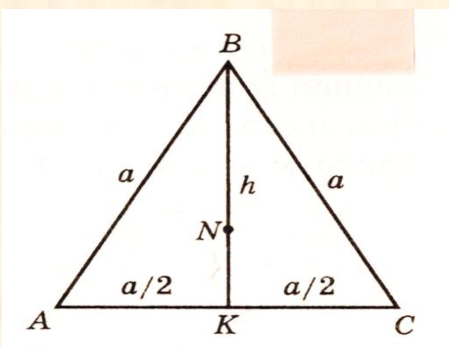
# База знаний

- Пирамида называется правильной, если в ее основании лежит правильный многоугольник (в рассматриваемой задаче треугольник), а вершина пирамиды проецируется в центр основания
- В правильной пирамиде боковые ребра наклонены к плоскости основания под одним и тем же углом
- В правильной пирамиде боковые грани наклонены к плоскости основания под одним и тем же углом
- В правильном треугольнике все стороны равны, углы равны 60°, а каждая из его медиан является одновременно высотой, биссектрисой и лежит на серединном перпендикуляре к стороне треугольника
- Медианы треугольника пересекаются в одной точке, и каждая из них делится точкой пересечения в отношении 2:1, считая от вершины треугольника
- Центром правильного треугольника называется точка пересечения его медиан, которая совпадает с центром вписанной и описанной окружностей

**Выполним чертеж к задаче**

$h=\frac{a\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3};$




**1 группа.** Найти высоту ***h*** треугольника, лежащего в основании пирамиды; его площадь $\boldsymbol{S_{осн.}}$; радиус $\boldsymbol{r_в}$ окружности, вписанной в основание; радиус $\boldsymbol{r_o}$ окружности, описанной около основания; объем пирамиды ***V*.**

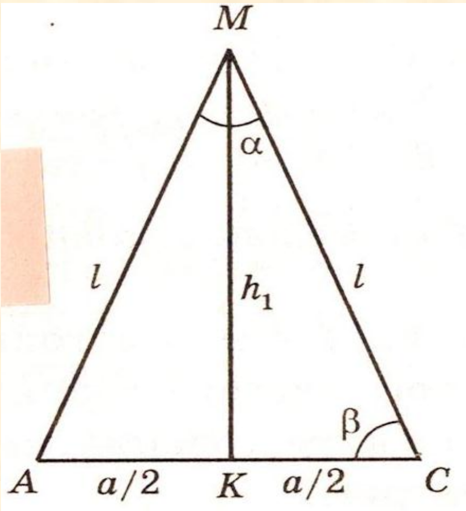
Применим деталировку: вычертим отдельно правильный Δ ABC, в котором AB=BC=CA=a=6 по условию. Проведем BK AC, тогда BK=h, AK=KC=a/2 = 3.

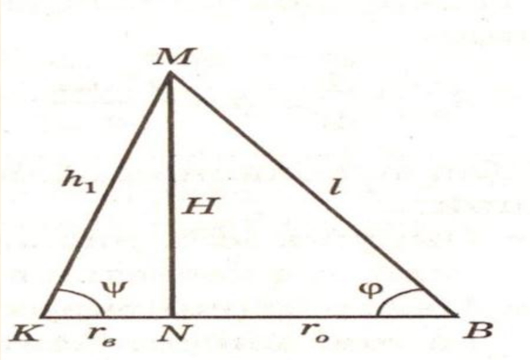
В базу знаний должны быть включены правила расчета элементов прямоугольного треугольника с использованием тригонометрических функций, теорема Пифагора, а также формулы вычисления площади треугольника и объема пирамиды.

$h=\frac{a\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$; $S_{осн.} = 9\sqrt{3}$; $V=24\cdot\sqrt{3}$

Поскольку Δ ABC – правильный, то точка пересечения его медиан Nявляется одновременно точкой пересечения биссектрис и серединных перпендикуляров, а следовательно, общим центром вписанной и описанной окружностей: $r_0 = BN=2\sqrt{3}$; $r_в = NK=\sqrt{3}$

**Чтобы выполнить задания 2-8, осуществим новую деталировку: вычертим Δ АМС и Δ ВМК**




1. Пополним базу знаний следующими фактами:

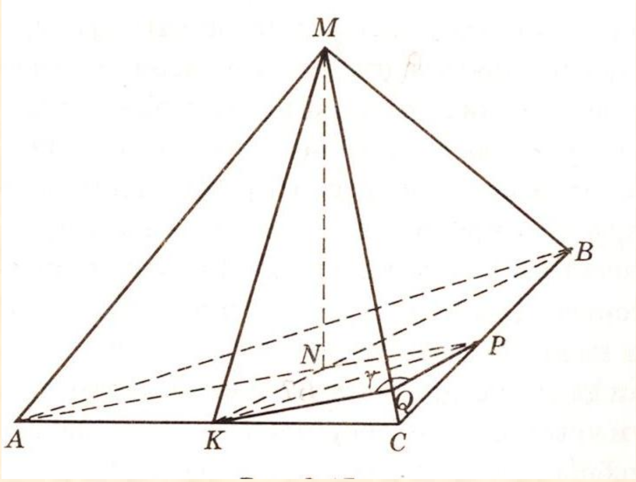
- Теорема о трех перпендикулярах;
- Теорема синусов;
- Формулы площади треугольника;
- Свойство медианы, проведенной из вершины равнобедренного треугольника
- Определение угла между прямой и плоскостью
- Определение двугранного угла.
- Линейный угол двугранного угла
- Определение плоского угла при вершине пирамиды.

***Ответ*.**

2. $l=2\sqrt{19}$; $h_1=\sqrt{67}$; $S_{бг} = 3\sqrt{67}$; $S_{бп} = 9\sqrt{67}$;

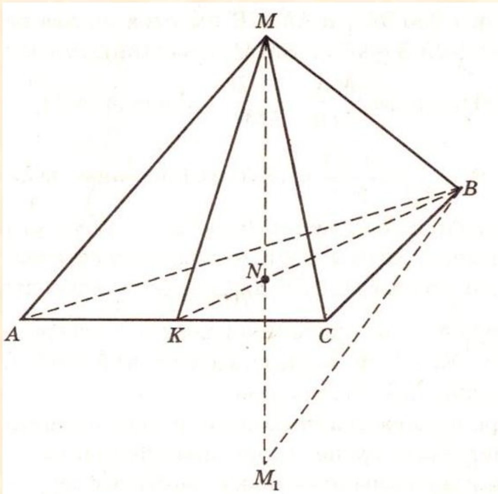
- $r_{в1} = \frac{3\sqrt{67}}{3+2\sqrt{19}}$ $\qquad r_{о1} = \frac{38\sqrt{67}}{67}$

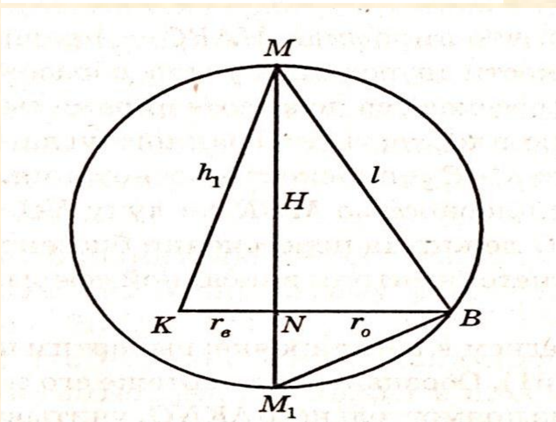
**Найдем двугранный угол, образованный боковыми гранями пирамиды AMC и BMC**




- Ответ: γ= arccos $\frac{29}{67}$

## Вычислим радиус $R_o$ сферы, описанной около пирамиды




### Пополним базу знаний.

- Определение сферы, описанной около многогранника.
- Если около пирамиды можно описать сферу, то ее центр, будучи равноудаленным от всех вершин пирамиды, должен лежать на пересечении перпендикуляра, проведенного к плоскости основания через центр описанной около него окружности, и плоскости, перпендикулярной к боковому ребру, проходящей через его середину.
- Вписанный в окружность угол равен половине дуги, на которую он опирается. Вписанный угол, который опирается на диаметр окружности, равен 90°.
- 3-й признак подобия треугольников.
- Ответ: $R_o = \frac{l^2}{2H} = 4{,}75$

# Ответы

$h = 3\sqrt{3}$ см; $r_о = 2\sqrt{3}$ см; $r_в = \sqrt{3}$ см;

$l = 2\sqrt{19}$ см; $h_1 = \sqrt{67}$ см; $r_{о_1} = \dfrac{38\sqrt{67}}{67}$ см; $r_{в_1} = \dfrac{3\sqrt{67}}{2\sqrt{19}+3}$ см;

$S_{осн} = 9\sqrt{3}$ см$^2$; $S_{бг} = 3\sqrt{67}$ см$^2$; $S_{бп} = 9\sqrt{67}$ см$^2$; $V = 24\sqrt{3}$ см$^3$;

$$\alpha = 2\arcsin\frac{3\sqrt{19}}{38} = 2\arccos\frac{\sqrt{1273}}{38};$$

$$\beta = \arccos\frac{3\sqrt{19}}{38} = \arcsin\frac{\sqrt{1273}}{38};$$

$$\varphi = \arcsin\frac{4\sqrt{19}}{19} = \arccos\frac{\sqrt{57}}{19} = \mathrm{arctg}\frac{4\sqrt{3}}{3};$$

$$\psi = \arcsin\frac{8\sqrt{67}}{67} = \arccos\frac{\sqrt{201}}{67} = \mathrm{arctg}\frac{8\sqrt{3}}{3};$$

$\gamma = \arccos(29/67)$.

$R_о = 4{,}75$ см; $R_в = \dfrac{\sqrt{201}-3}{8}$ см;

$d_1 = \dfrac{8\sqrt{201}}{67}$ см; $\lambda = 90°$; $d_2 = \dfrac{12\sqrt{57}}{19}$ см.

# Ответы:

$h = 3\sqrt{3};\quad r_o = 2\sqrt{3};\ r_в = \sqrt{3};,\ l = 2\sqrt{19};$

$h_{1=}\sqrt{67}\ ;\ r_{в1} = \frac{3\sqrt{67}}{3+2\sqrt{19}}\ ;\qquad r_{o1} = \frac{38\sqrt{67}}{67}$

$S_{осн=}\ 9\sqrt{3};\qquad S_{бг} = 3\sqrt{67}\qquad S_{бп} = 9\sqrt{67}$

$V = 24\sqrt{3};\quad \alpha = 2\arcsin\frac{3\sqrt{19}}{38} = 2\arccos\frac{\sqrt{1273}}{38}$

$\beta = \arccos\frac{3\sqrt{19}}{38} = \arcsin\frac{\sqrt{1273}}{38}$

$\varphi = \arcsin\frac{4\sqrt{19}}{19} = \arccos\frac{\sqrt{57}}{19} = \mathrm{arctg}\,\frac{4\sqrt{3}}{3}$

$\Psi = \arcsin\frac{8\sqrt{67}}{} = \arccos\frac{\sqrt{201}}{} = \mathrm{arctg}\,\frac{8\sqrt{3}}{}$