Приёмы решения геометрических задач

Вебинар по подготовке к ОГЭ
20.01.2017 г.

«Со знанием должно быть обязательно связано умение... Печальное явление, когда голова ученика наполнена большим или меньшим количеством знаний, но он не научился их применять, так что о нем приходится сказать, что хотя он кое-что знает, но ничего не умеет»

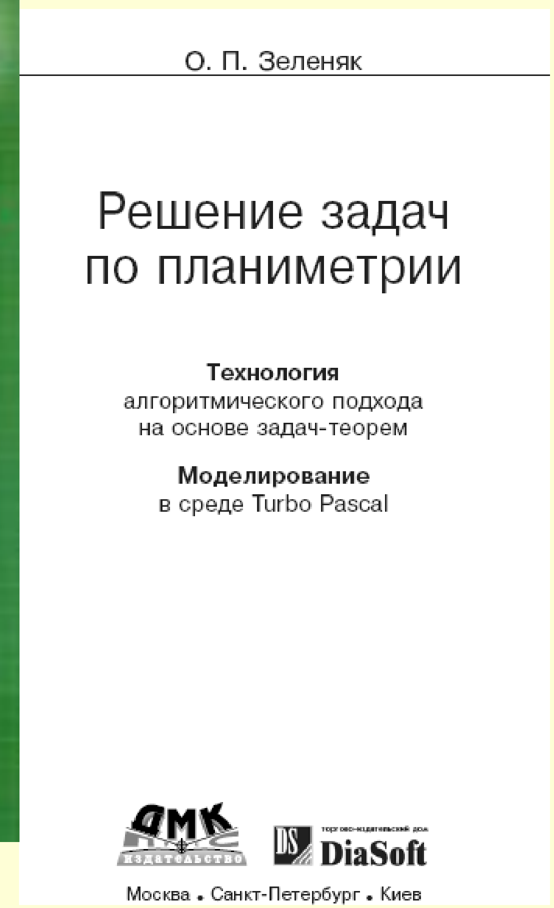
А. Дистервег

Геометрические задачи повышенной сложности

Решаются с помощью

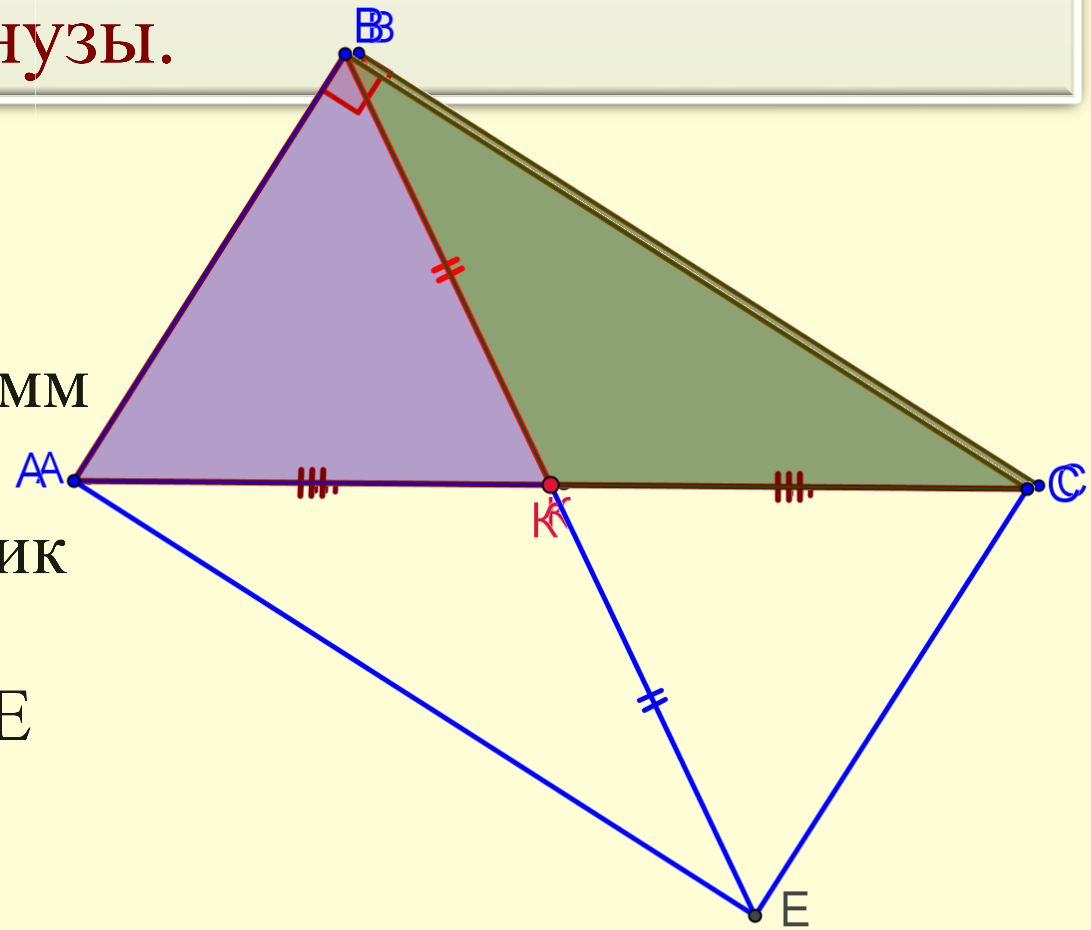
1. применения ключевых (базовых) задач-теорем
2. избранных методов решения

Используемая литература



Метод решения: Удвоение медианы

Медиана прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы.



Удвоим медиану ВК, продлив ее за точку К

АВСЕ – параллелограмм (по признаку)

АВСЕ – прямоугольник (т.к. $\angle B = 90°$)

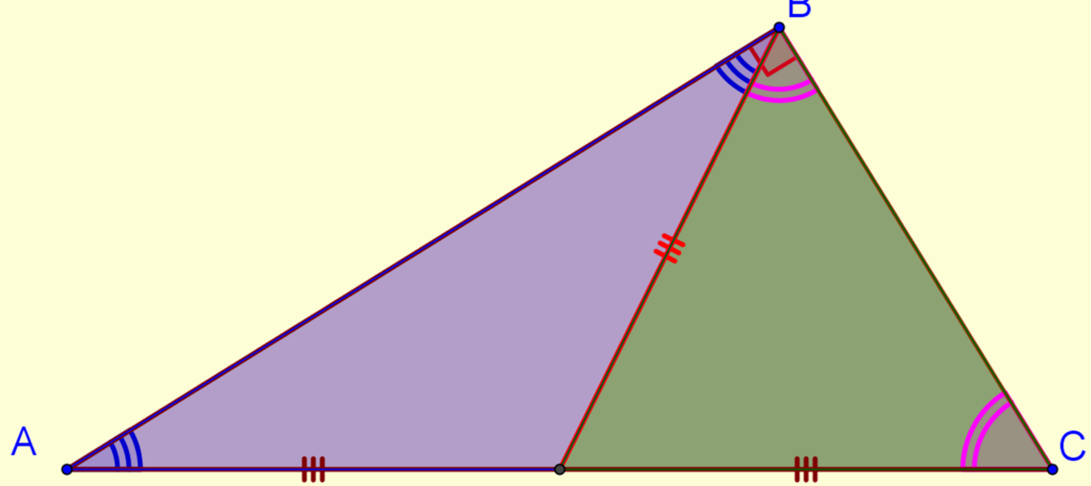
$\Rightarrow$ ВК = АС = КС = КЕ

$\Rightarrow$ ВК = ½ АС

Ключевая задача

Следствие из свойства медианы к гипотенузе. Ключевая задача

Медиана прямоугольного треугольника, проведённая к гипотенузе, делит треугольник на два равнобедренных треугольника, основаниями которых являются катеты данного треугольника



Использование введения буквенных обозначений величин. Ключевая задача

Если медиана треугольника равна половине стороны, к которой она проведена, то треугольник прямоугольный.

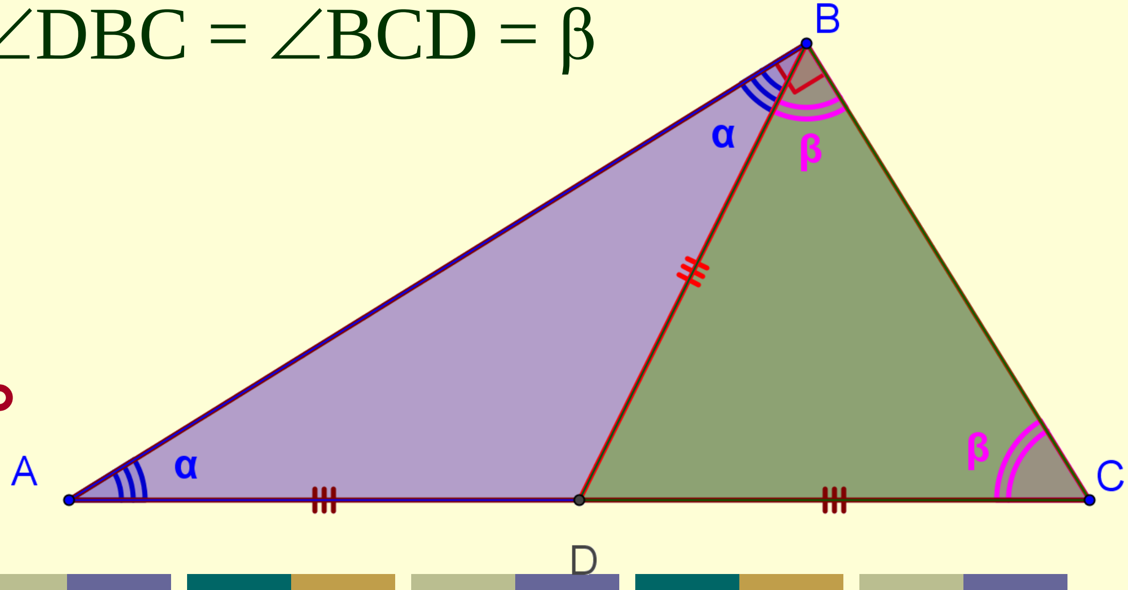
ΔABD и Δ BCD – равнобедренные

$\angle BAD = \angle ABD = \alpha$; $\angle DBC = \angle BCD = \beta$

$$2\alpha + 2\beta = 180^\circ$$

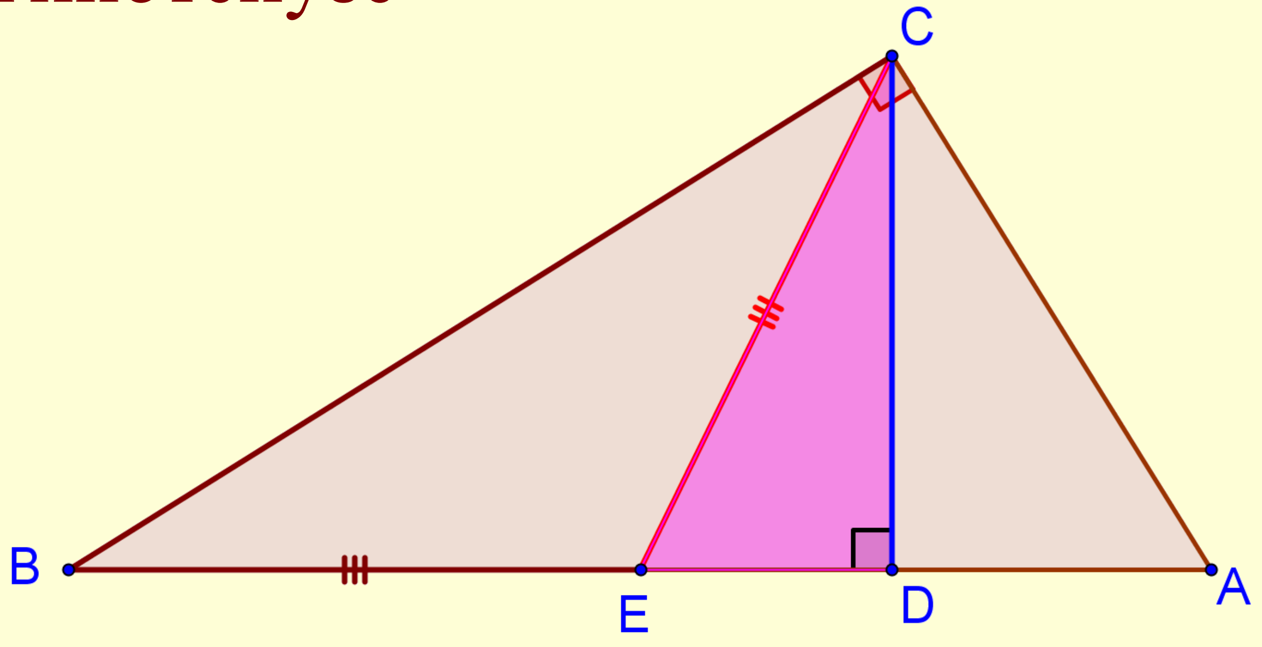
$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

$$\angle ABC = \alpha + \beta = 90^\circ$$



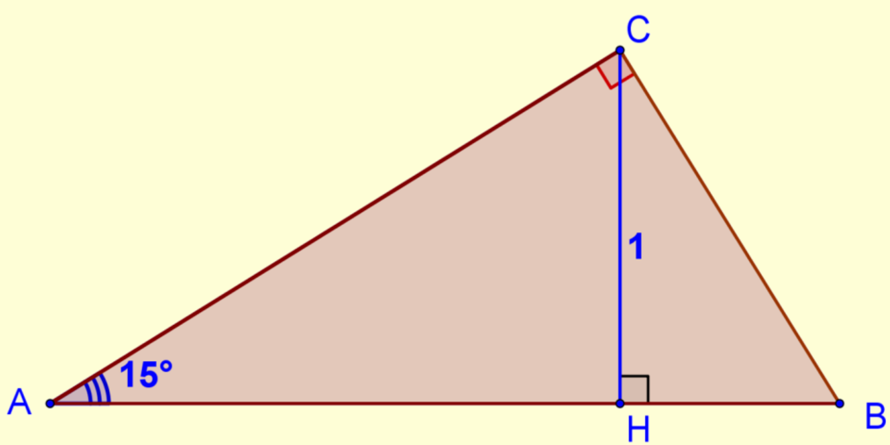
Метод вспомогательных построений

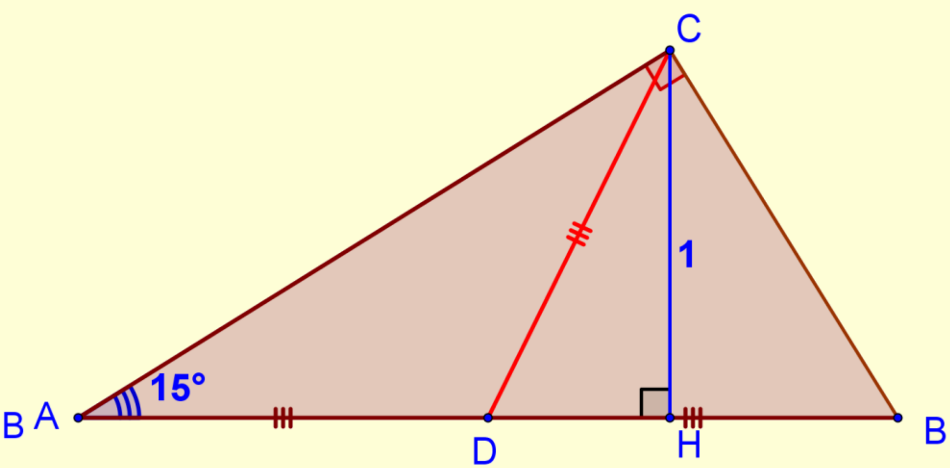
При решении некоторых задач удобно в прямоугольном треугольнике выделять треугольник, образованный медианой и высотой к гипотенузе



Применение свойства медианы к гипотенузе

Найдите гипотенузу прямоугольного треугольника с острым углом 15°, если известно, что высота треугольника, опущенная на гипотенузу, равна 1.





Проведем медиану CD к гипотенузе.

ΔACD - равнобедренный $\angle CAD = \angle ACD = 15°$

Применение свойства медианы к гипотенузе

Найдите гипотенузу прямоугольного треугольника с острым углом 15°, если известно, что высота треугольника, опущенная на гипотенузу, равна 1.

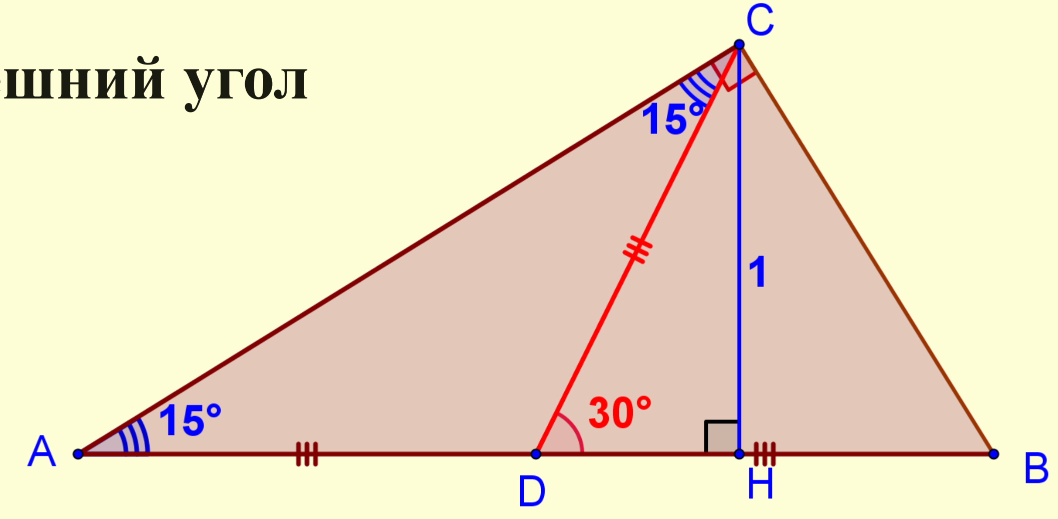
$\angle CAD = \angle ACD = 15°$

$\angle CDH = 30°$ как внешний угол

$CD = 2CH = 2$

$AB = 2CD = 4$

***Ответ:* 4**



Применение свойства медианы к гипотенузе

Найдите острые углы прямоугольного треугольника, если его гипотенуза равна 12, а площадь равна 18.

Проведем медиану CD и высоту CH к гипотенузе.

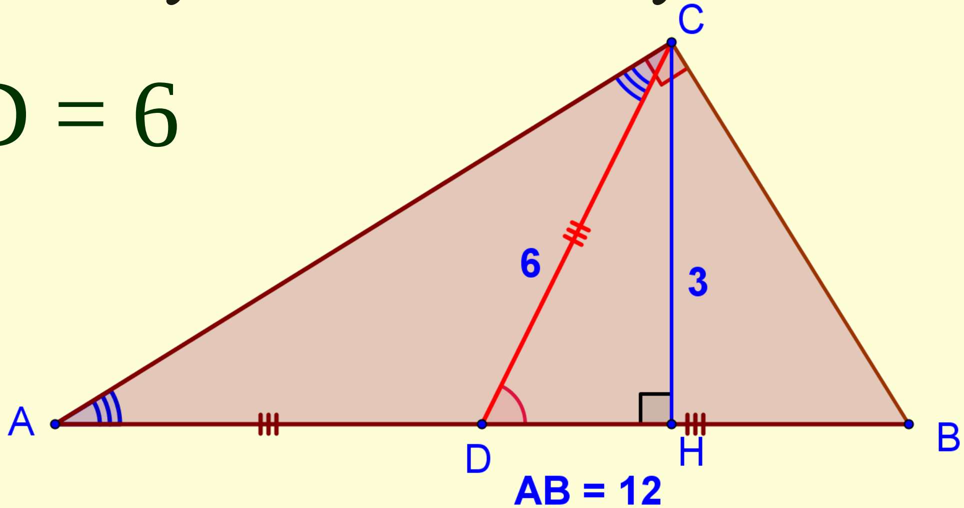
$$CH = \frac{2S}{c} = \frac{2\cdot 18}{12} = 3;$$

CD = 6

$$\Rightarrow \angle CDH = 30°$$

$$\Rightarrow \angle CAD = \angle ACD = 15°$$

$$\angle CBA = 90° - 15° = 75°$$

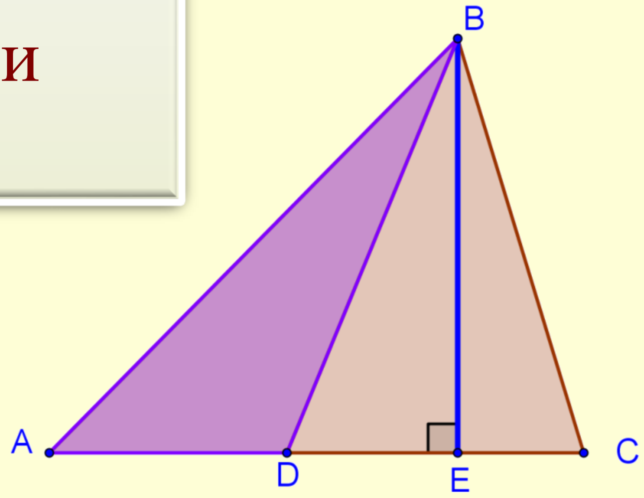


***Ответ:* 15°; 75°**

Свойства площади треугольника

Площади треугольников, имеющих общую высоту (равные высоты) , относятся как стороны, к которым эти высоты проведены

$$\frac{S_{ABD}}{S_{CBD}} = \frac{AD}{DC}$$

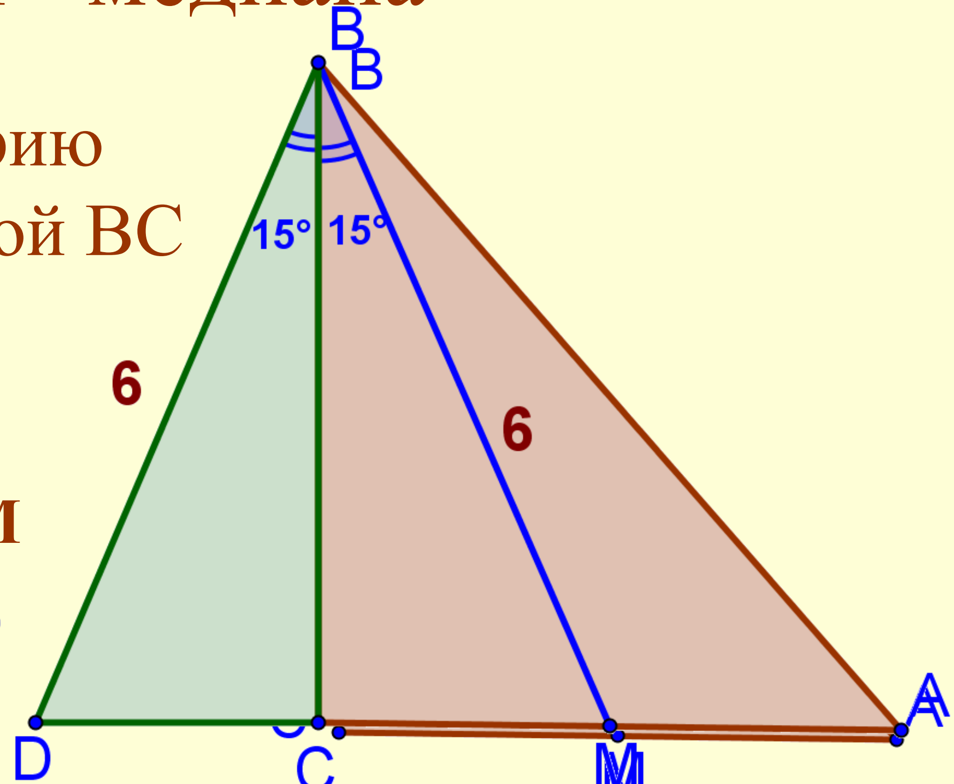


2. Медиана делит треугольник на два равновеликих треугольника

Метод вспомогательных построений. Использование осевой симметрии

В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C медиана BM равна 6, ∠ MBC = 15º. Найдите площадь треугольника ABC.

$S_{\Delta ABC} = 2S_{CBM}$, т.к. BM - медиана



Выполним осевую симметрию ΔCBM относительно прямой BC

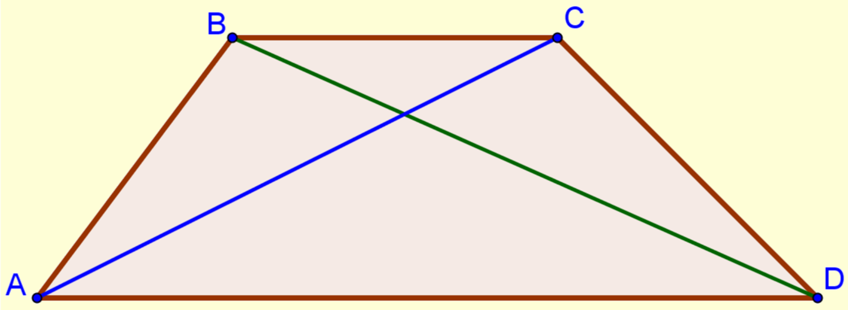
$S_{\Delta DBC} = S_{CBM}$

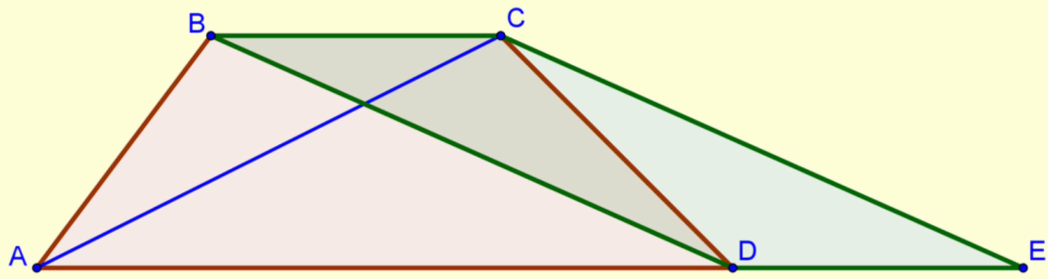
$S_{\Delta ABC} = S_{DBM} = 2S_{CBM}$

$S_{ABC} = \frac{1}{2} BM^2 \cdot \sin 30° = 9$

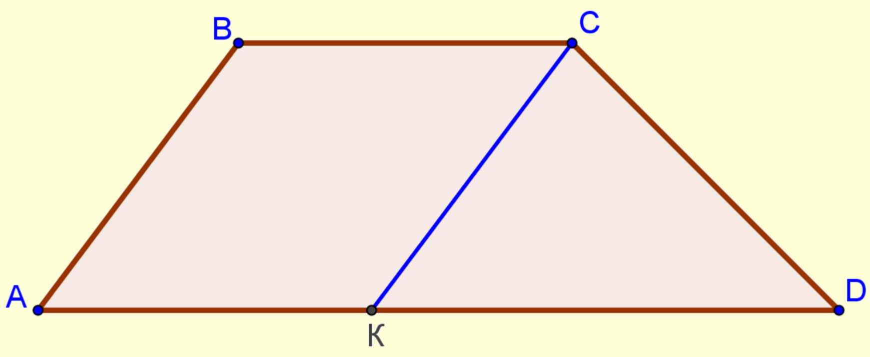
***Ответ:* 9**

Построение вспомогательных отрезков в трапеции

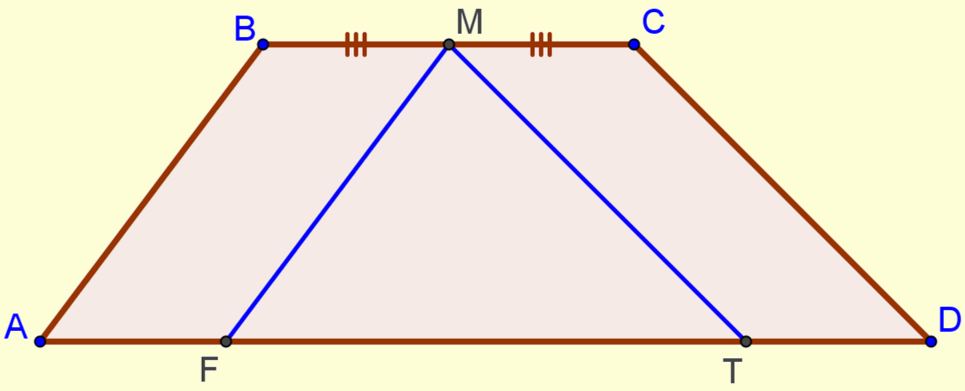




Прямую, параллельную одной из диагоналей трапеции



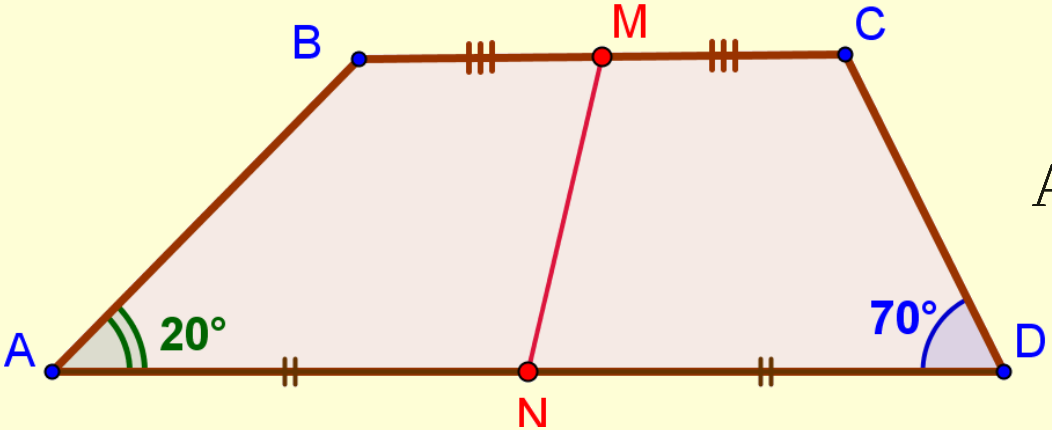
Прямую, параллельную одной из боковых сторон трапеции



Прямые, параллельные обеим боковым сторонам трапеции

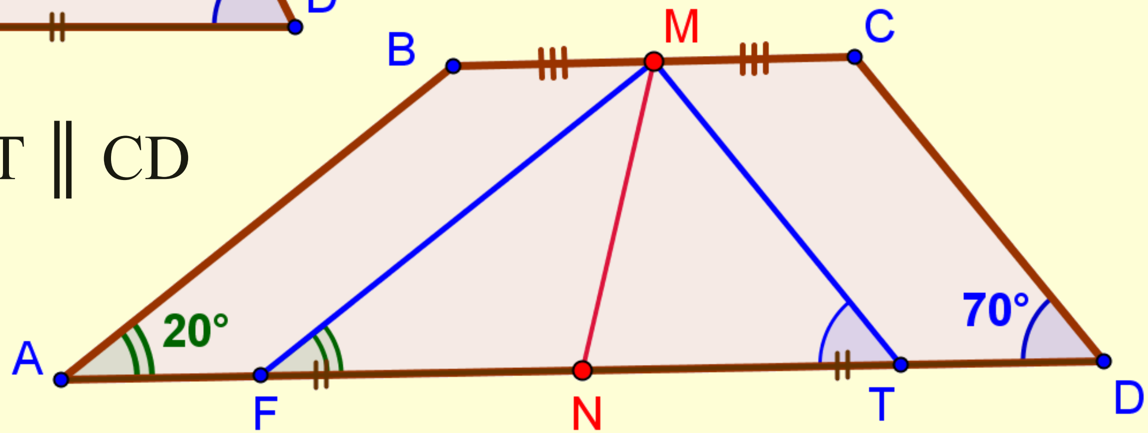
Медиана прямоугольного треугольника к гипотенузе

В трапеции ABCD с основаниями BC и AD $\angle BAD = 20°$, $\angle CDA = 70°$, средняя линия равна 5, а длина отрезка, соединяющего середины оснований, равна 3. Найдите длину основания AD.



AD – большее основание

Построим $MF \parallel AB$, $MT \parallel CD$



Применение свойства медианы к гипотенузе

В трапеции ABCD с основаниями BC и AD $\angle BAD = 20°$, $\angle CDA=70°$, средняя линия равна 5, а длина отрезка, соединяющего середины оснований, равна 3. Найдите длину основания AD.

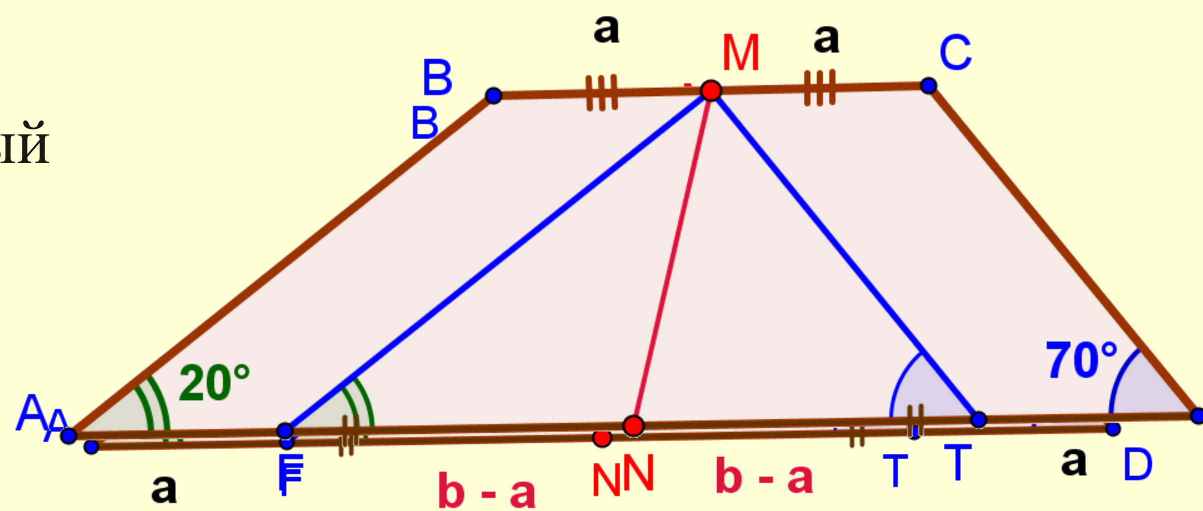
$\angle FMT$ - прямой

ΔFMT - прямоугольный

MN- медиана?

Обозначим AN = NB = b;

AD = 2b, BM = MC = a



⇒ MN- медиана к гипотенузе

⇒ FT = 2MN = 6

Медиана прямоугольного треугольника к гипотенузе

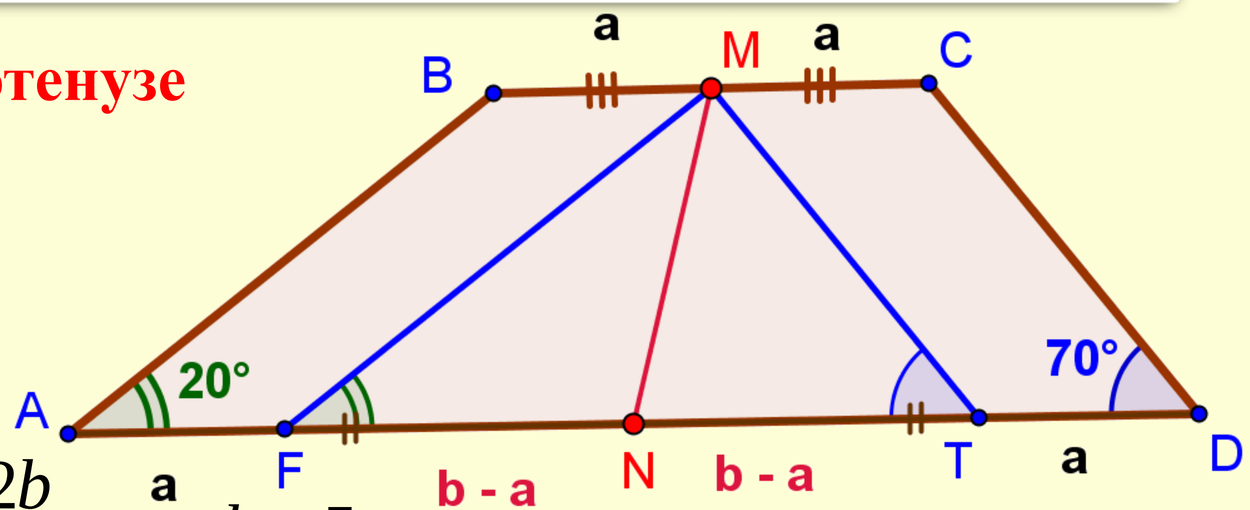
12. В трапеции ABCD с основаниями BC и AD $\angle BAD = 20°$, $\angle CDA = 70°$, средняя линия равна 5, а длина отрезка, соединяющего середины оснований, равна 3. Найдите длину основания AD.

MN- медиана к гипотенузе

FT = 2MN = 6

FT = 2b – 2a = 6

средняя линия KL



$$KL = \frac{BC + AD}{2} = \frac{2a + 2b}{2} = a + b = 5$$

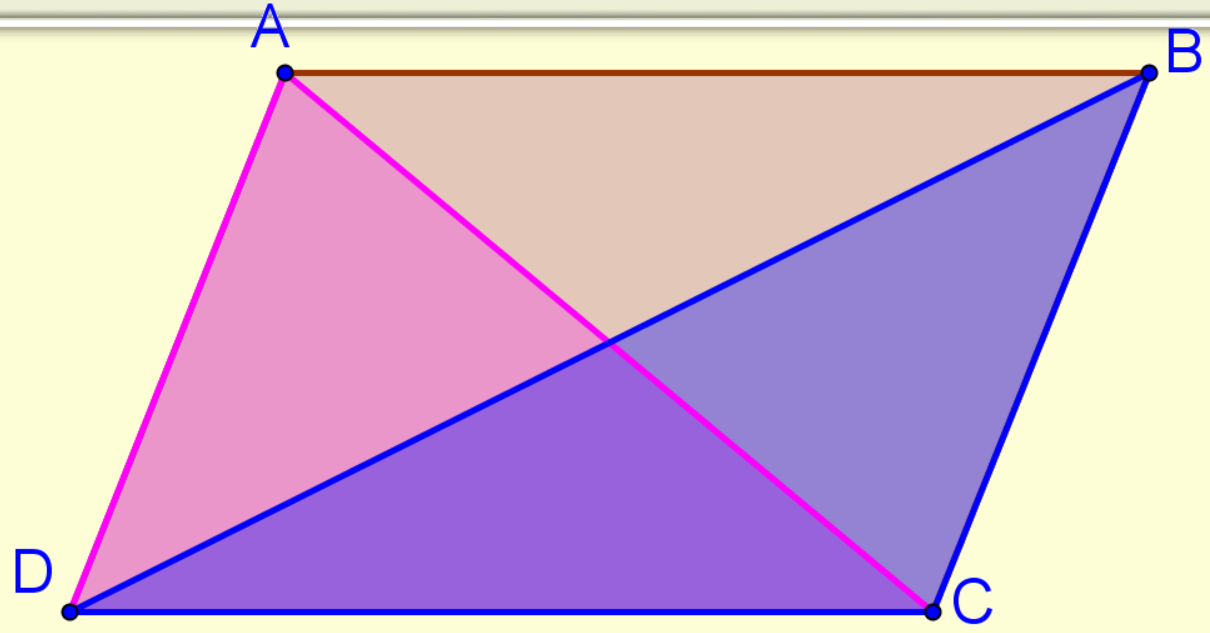
$$\begin{cases} a + b = 5, \\ b - a = 3; \end{cases} \qquad \begin{cases} b = 4, \\ a = 1. \end{cases}$$

AD = 2b = 8

Ответ: 8

Метод решения: Переход к равновеликой вспомогательной фигуре

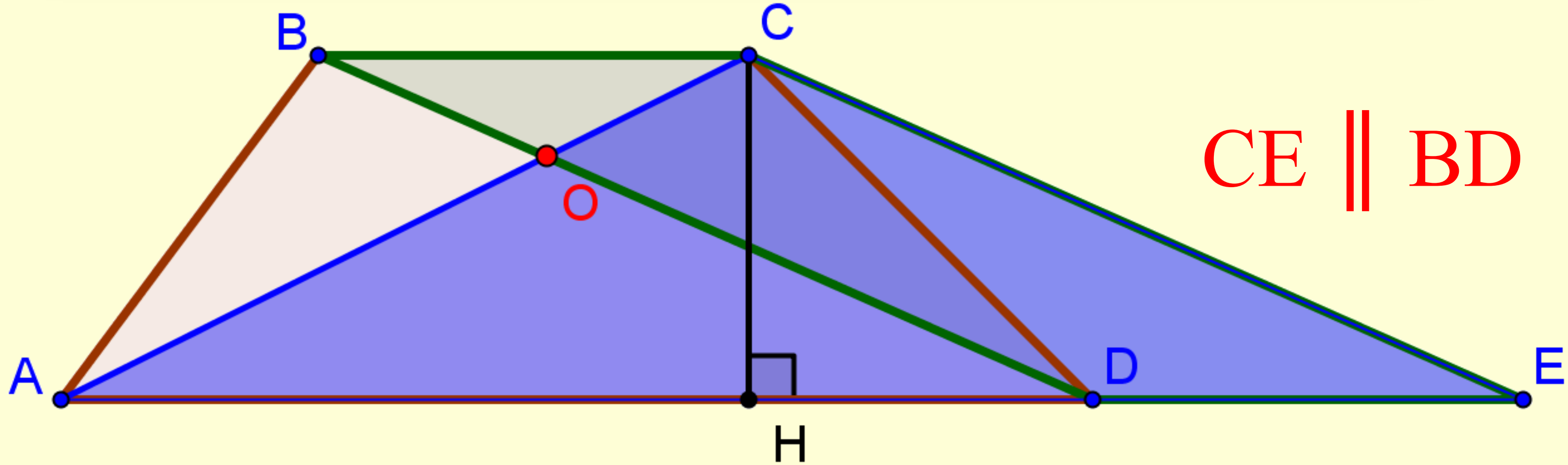
В параллелограмме ABCD площадь треугольника ACD равна площади треугольника DBC



$$S_{\Delta DAC} = S_{\Delta DBC} = \tfrac{1}{2} S_{ABCD}$$

Метод решения: Переход к равновеликой вспомогательной фигуре

Площадь трапеции ABCD равна площади треугольника ACE



$CE \parallel BD$

AE = AD + DE =AD + BC

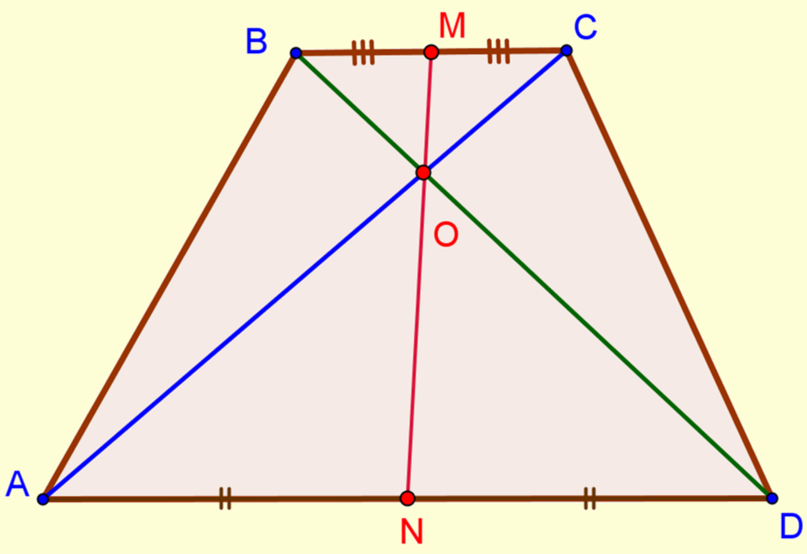
Дополнительные построения в трапеции.

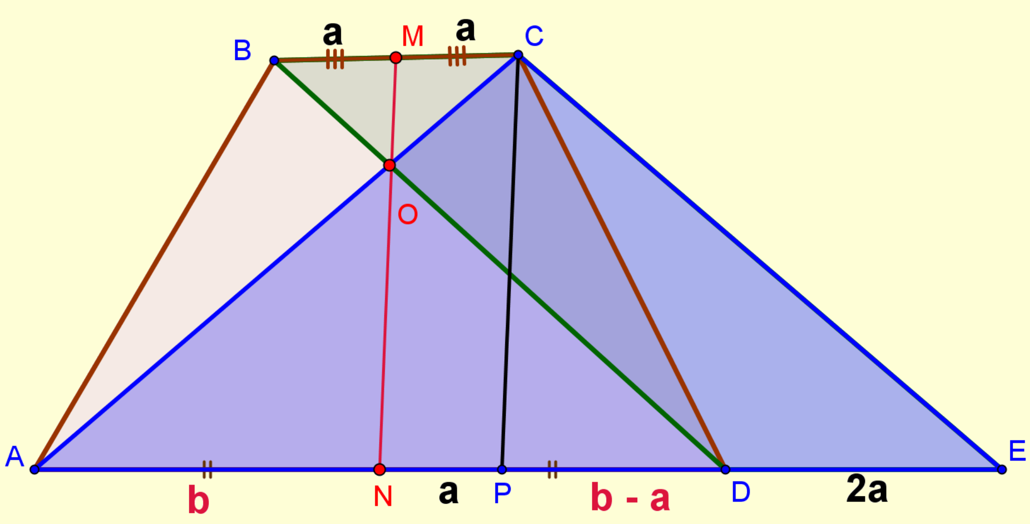
Переход к равновеликой вспомогательной фигуре

Диагонали трапеции равны 3 и 5, а отрезок, соединяющий середины оснований, равен 2. Найдите площадь трапеции.

Проведем CE ∥ BD, CP ∥ MN

$S_{ABCD} = S_{\Delta ACE}$





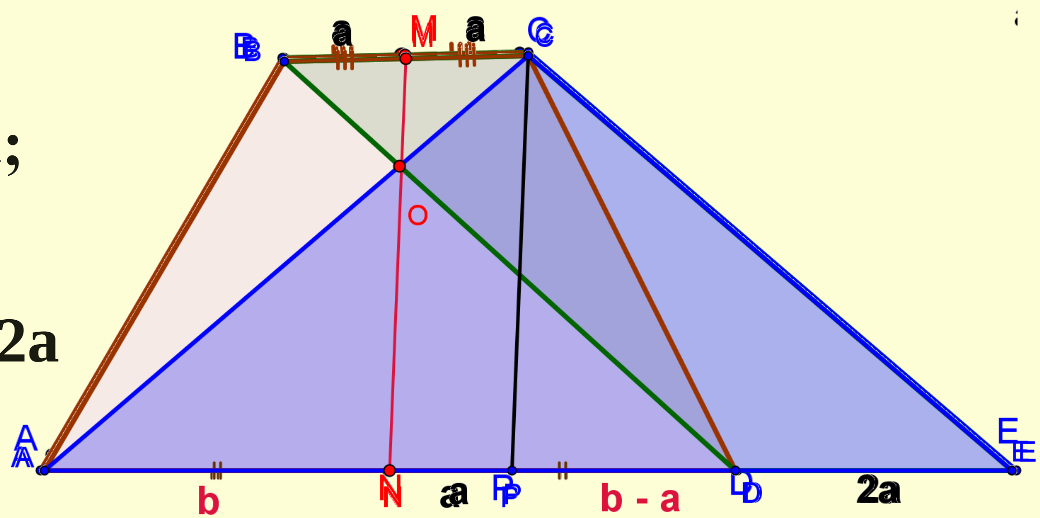
Дополнительные построения в трапеции.

Диагонали трапеции равны 3 и 5, а отрезок, соединяющий середины оснований, равен 2. Найдите площадь трапеции.

CP – медиана ?

Обозначим BM =MC = a;
AN = ND = b

MC = NP = a; BC = DE = 2a
PD = b - a



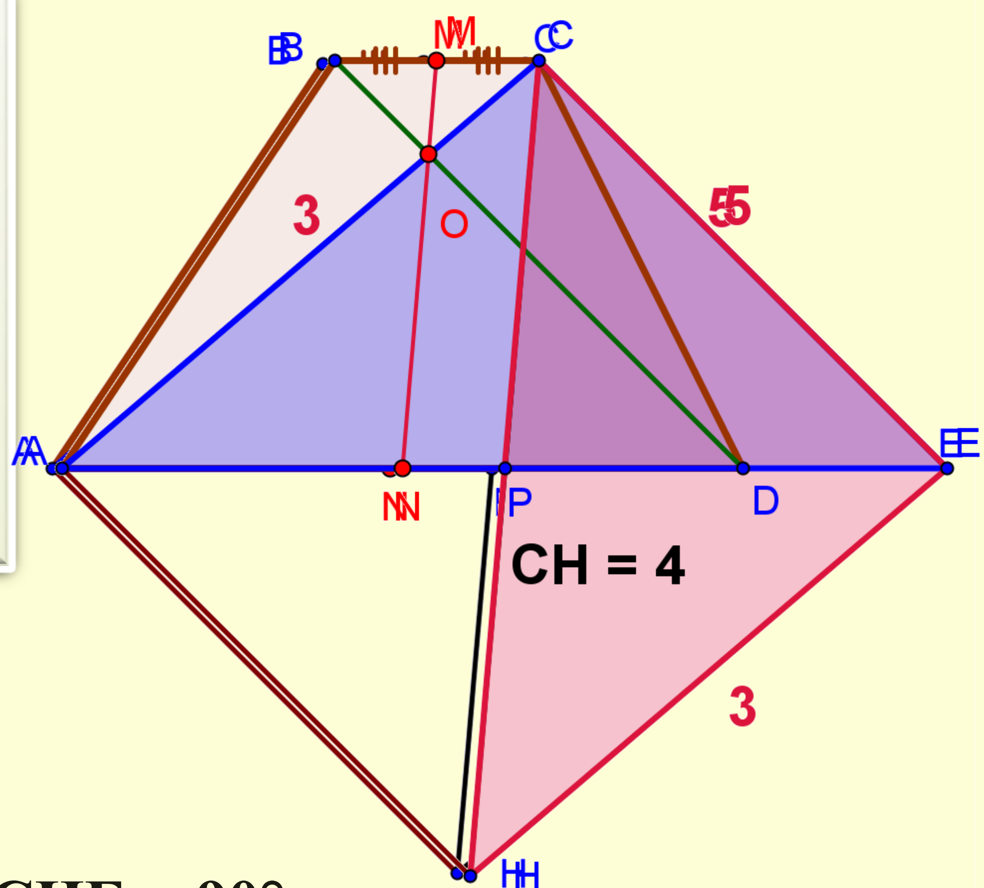
AP =b + a; PE=b – a+2a = b + a

⇒ CP – медиана к гипотенузе

Применим метод удвоения медианы

Дополнительные построения в трапеции. Метод удвоения медианы. Переход к равновеликой фигуре

Диагонали трапеции равны 3 и 5, а отрезок, соединяющий середины оснований, равен 2. Найдите площадь трапеции.



CH=2CP= 4

$S_{\Delta CHE} = S_{\Delta ACE} = S_{ABCD}$

CH= 4; CE = 5; HE = 3

$\Rightarrow \Delta CHE$ - прямоугольный, $\angle CHE = 90°$

$S_{ABCD} = S_{\Delta ACE} = S_{\Delta CHE} = \frac{1}{2}\, CH \cdot HE = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6$

Ответ: 6

Метод площадей

Идея метода: площади фигуры находим, используя различные формулы или различные отрезки и углы. Приравняв эти выражения, получаем уравнение, содержащее известные и искомые величины.

Метод площадей

Медиана BM треугольника ABC равна его высоте AH. Найдите угол MBC.

Пусть ∠MBC = α Т.к. BM - медиана

$$\Rightarrow S_{ABC} = 2 \cdot S_{MBC} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot BM \cdot BC \cdot \sin\alpha$$

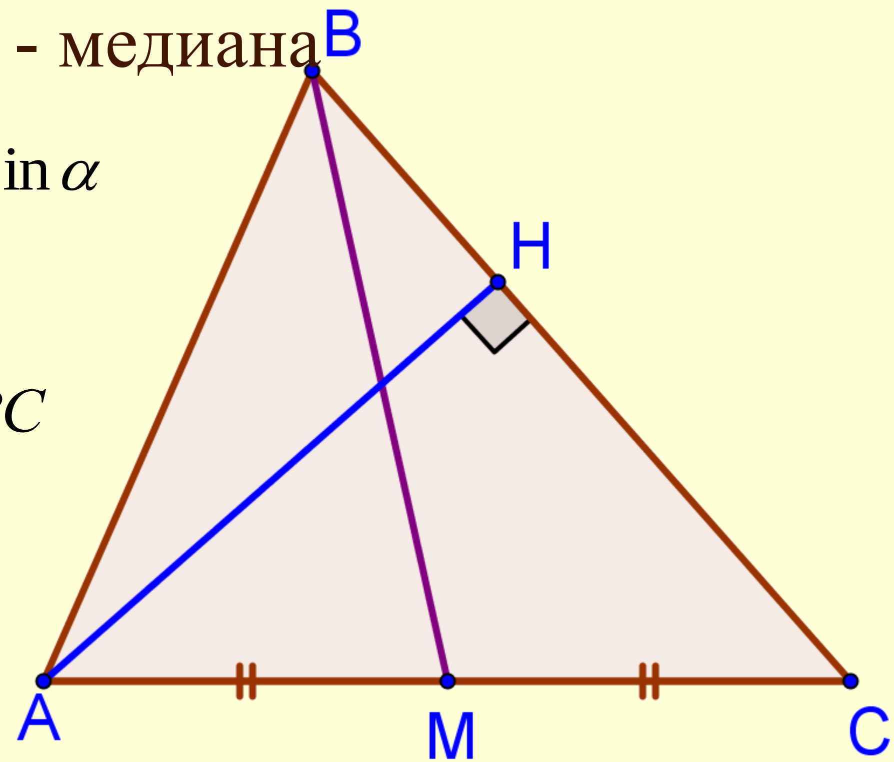
$$\Rightarrow S_{ABC} = BM \cdot BC \cdot \sin\alpha$$

С другой стороны $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AH \cdot BC$

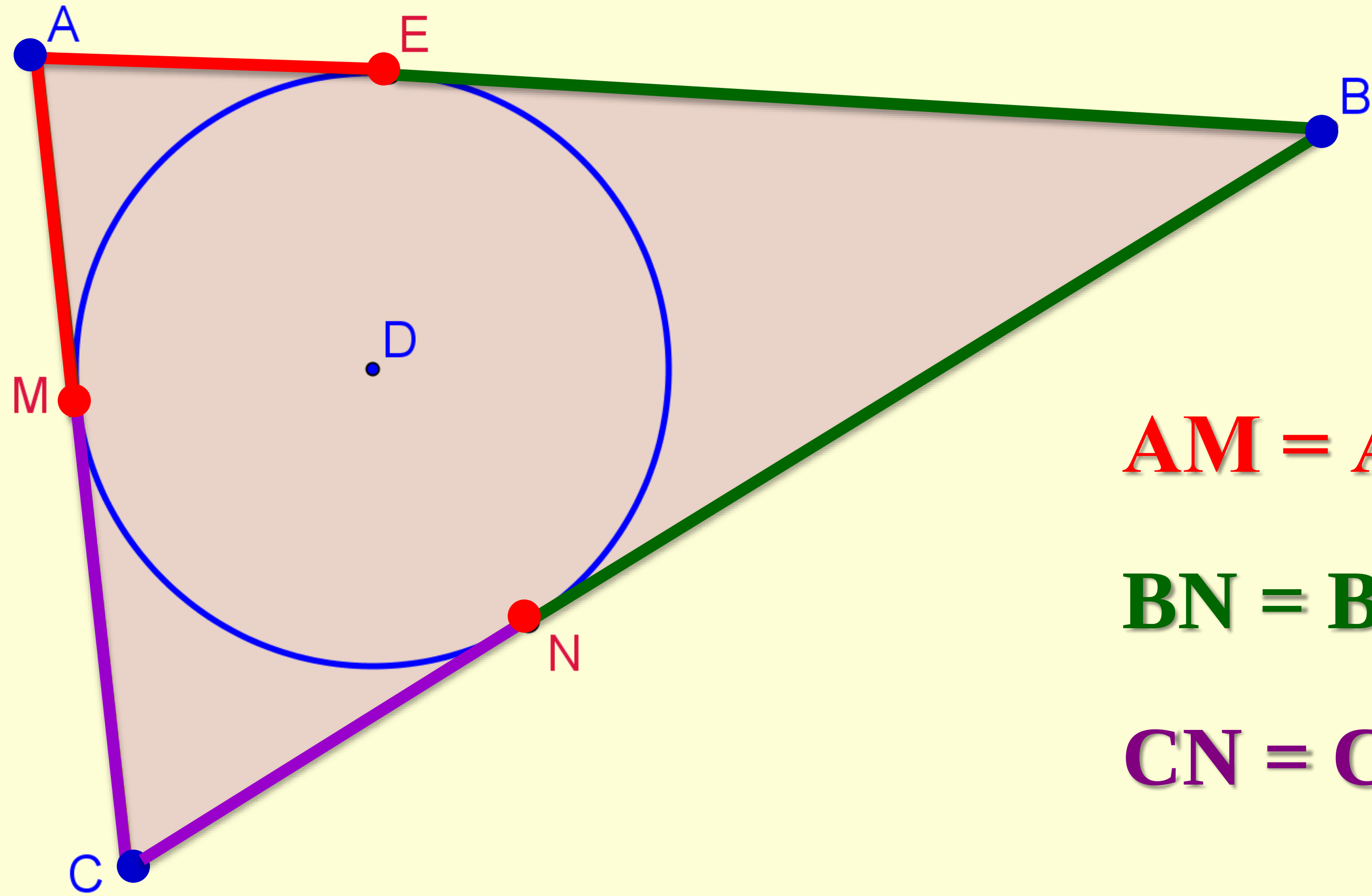
$$\Rightarrow BM \cdot BC \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} \cdot AH \cdot BC$$

Т. к. AH = BM, то

$\sin\alpha = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ ∠MBC = α = 30° или ∠MBC = 150°



Свойство деления сторон треугольника окружностью, вписанной в него.



AM = AE

BN = BE

CN = CM

Метод площадей

В треугольник вписана окружность радиуса 4. Одна из сторон треугольника разделена точкой касания на части, равные 6 и 8. Найдите две другие стороны треугольника.

Обозначим AM = AN = x $S = \frac{1}{2} P \cdot r$

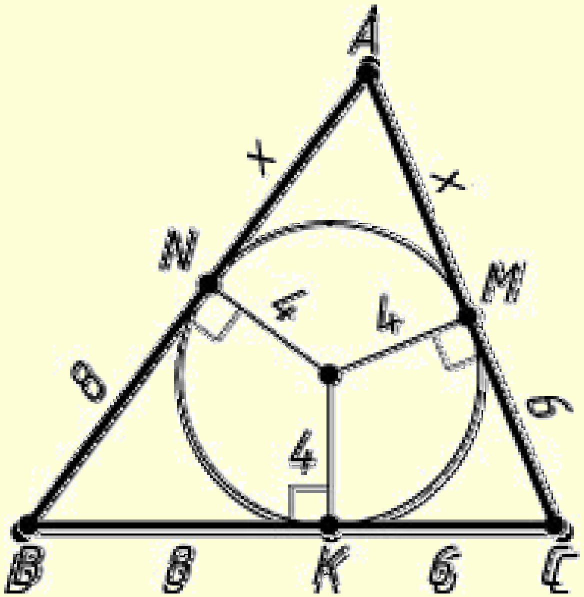
$$S_{\Delta ABC} = (8 + 6 + x) \cdot 4 = (14 + x) \cdot 4.$$

С другой стороны, по формуле Герона

$$S_{\Delta ABC} = \sqrt{(14 + x) \cdot 8 \cdot 6 \cdot x}$$

$$4 \cdot (14 + x) = \sqrt{(14 + x) \cdot 8 \cdot 6 \cdot x}$$

x = 7 ***AC* = *x* + 6 = 13, *AB* = *x* + 8 = 15**



***Ответ:* 13; 15**

Метод решения: Введение вспомогательной окружности

Идея метода: ввести в рассмотрение окружность, если это возможно в данной конфигурации, чтобы применить разнообразные свойства отрезков и углов, связанных с ней

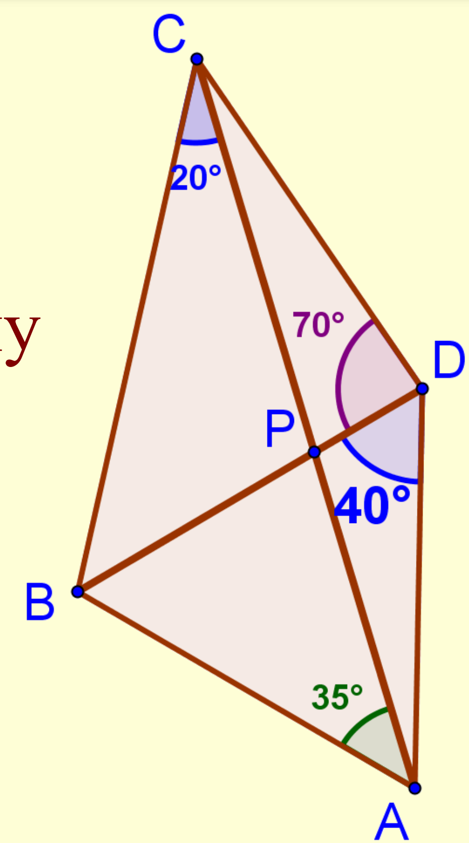
Введение вспомогательной окружности

В выпуклом четырехугольнике ABCD ∠ BCA = 20º, ∠ BAC = 35º, ∠ BDC = 70º, ∠ BDA = 40º. Найдите углы между диагоналями этого четырехугольника.

$$20^{\circ} = \tfrac{1}{2} \cdot 40^{\circ}$$

∠ BCA и ∠ BCA опираются на отрезок BA и лежат от него по одну сторону ⇒

Можно построить окружность с центром в точке D, проходящую через остальные три вершины четырехугольника C; B и D



Введение вспомогательной окружности

В выпуклом четырехугольнике ABCD ∠ BCA = 20º, ∠ BAC = 35º, ∠ BDC = 70º, ∠ BDA = 40º. Найдите углы между диагоналями этого четырехугольника.

CD = DA как радиусы одной окружности

⇒ Δ ACD - равнобедренный

∠ CAD = ∠ DCA =

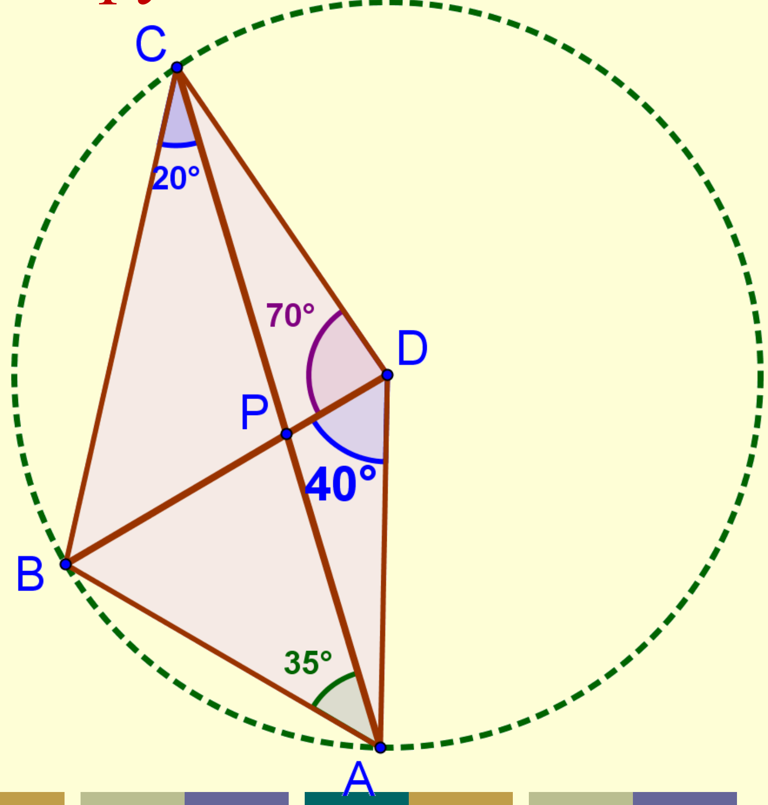
= (180º – 40º – 70º) : 2 = 35º.

Из Δ APD

∠ APD = 180º – 40º – 35º = **105º**.

Углы между диагоналями равны

105º и **75º**

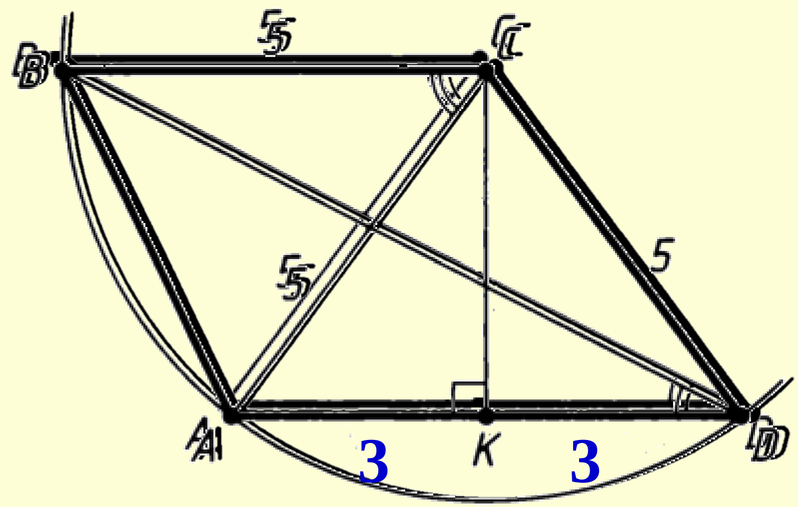


Ответ: 105°; 75°

Введение вспомогательной окружности

В трапеции ABCD (AD || BC) ∠ ADB в два раза меньше ∠ ACB. Известно, что BC = AC = 5 и AD = 6. Найдите площадь трапеции.

∠ ADB = ½ ∠ ACB и углы «опираются» на один отрезок – AB и лежат от него по одну сторону



Можно построить окружность **с центром в точке** **C** и

R = BC = AC = 5

⇒ CD = 5 ΔACD - равнобедренный

Проведём высоту CK CK = 4

$$S_{ABCD} = \frac{AD+BC}{2} \cdot CK = \frac{6+5}{2} \cdot 4 = 22.$$

Ответ: 22