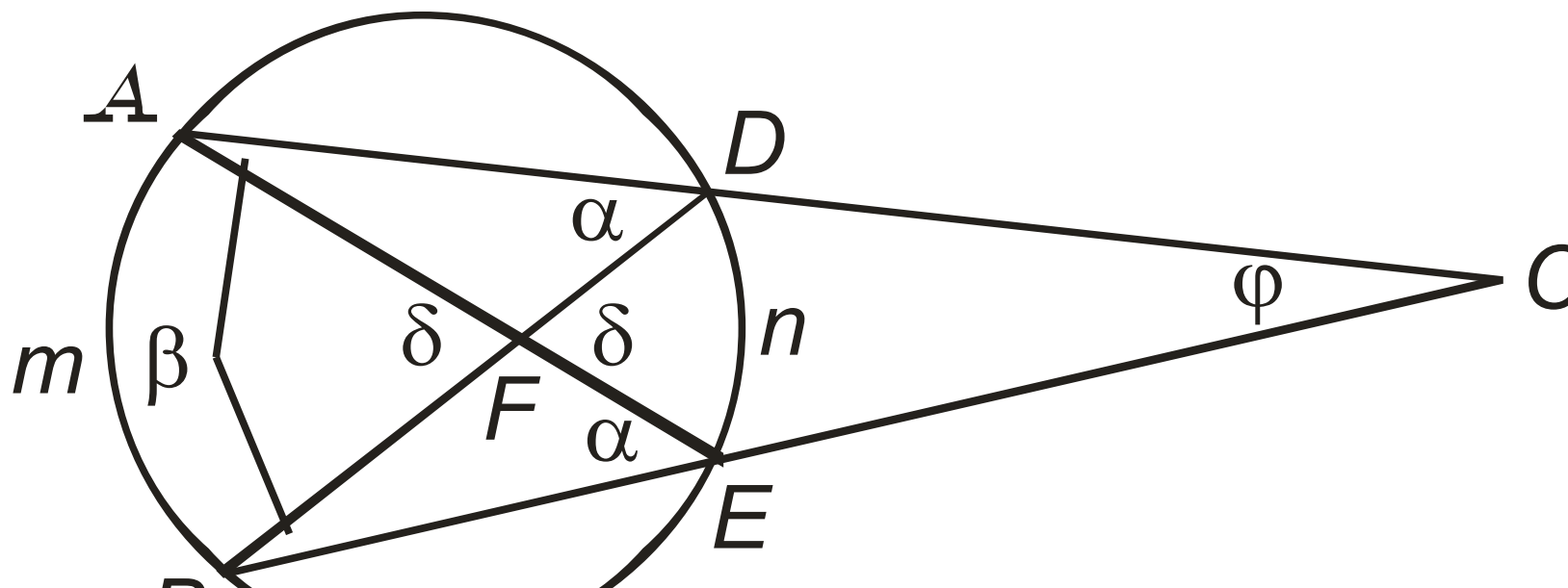


ТЕОРЕМЫ ОБ УГЛАХ В ОКРУЖНОСТЯХ, НЕ ВХОДЯЩИЕ В ШКОЛЬНЫЙ КУРС



ТЕОРЕМА 1 (Об углах между хордами)

Угол между хордами равен по величине полусумме мер дуг окружности, которые отсекают на окружности эти хорды



Доказательство.

По теореме о вписанном угле

$$\alpha = \frac{1}{2} \cup AmB, \quad \beta = \frac{1}{2} \cup DnE.$$

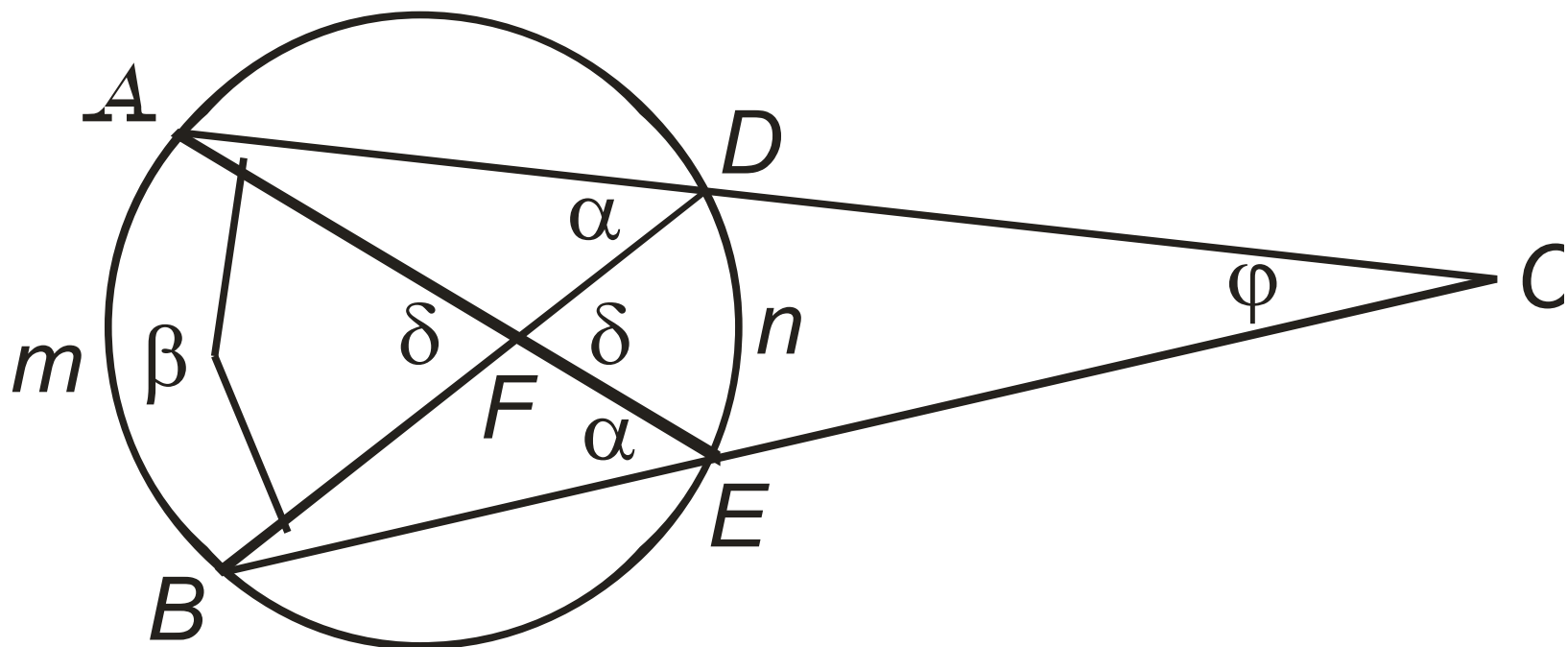
Применяя теорему о внешнем угле треугольника к треугольнику ADF или BEF , будем иметь:

$$\delta = \alpha + \beta = \frac{1}{2} (\cup AmB + \cup DnE).$$

ТЕОРЕМА 2 (Об угле между секущими)

Угол между секущими, выходящими из одной точки, равен полуразности мер дуг окружности, заключенных между ними:

$$\varphi = \frac{1}{2}(\cup AmB - \cup DnE)$$



Доказательство.

По теореме о вписанном угле

$$\alpha = \frac{1}{2} \cup AmB, \beta = \frac{1}{2} \cup DnE.$$

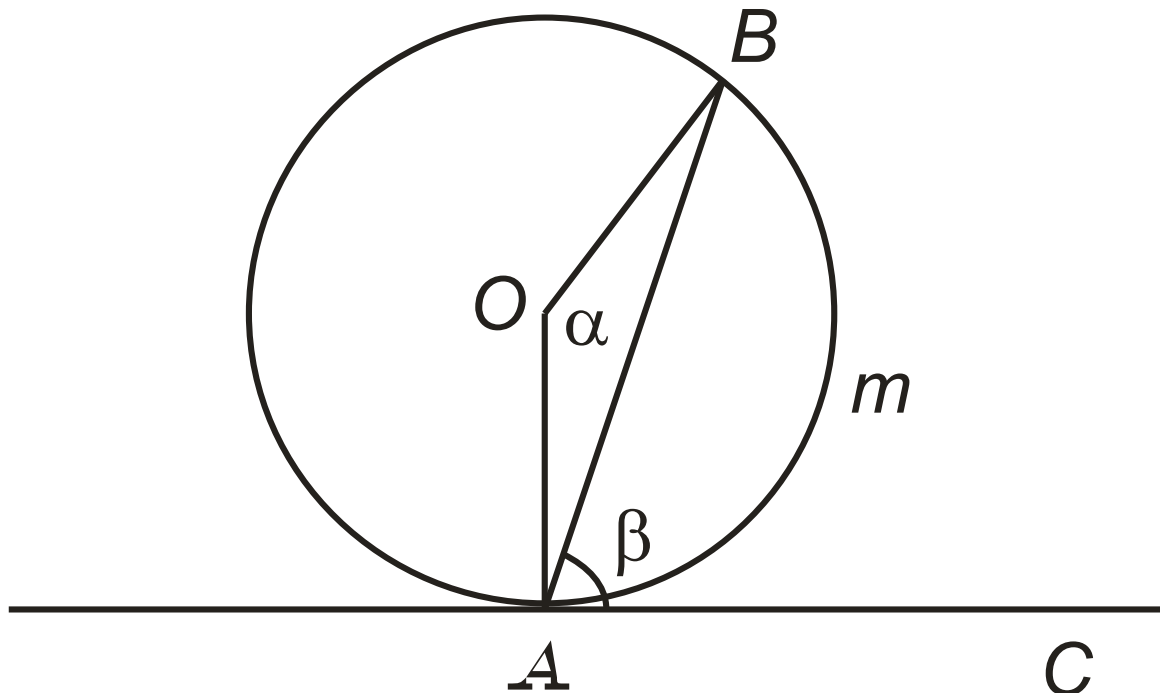
Применяя теорему о внешнем угле треугольника к треугольнику ACE , будем иметь: $\alpha = \varphi + \beta$, откуда

$$\varphi = \alpha - \beta = \frac{1}{2} (\cup AmB - \cup DnE).$$

ТЕОРЕМА 3

(Об угле между касательной и хордой)

Угол между касательной и хордой, проведенной из точки касания, измеряется половиной дуги, высекаемой на окружности этой хордой:

$$\beta = \frac{1}{2} \cup AmB = \frac{1}{2} \alpha$$


Доказательство.

Применяя свойство равнобедренного треугольника и теорему о сумме углов треугольника, получим:

$$\angle OAB = \angle OBA = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha.$$

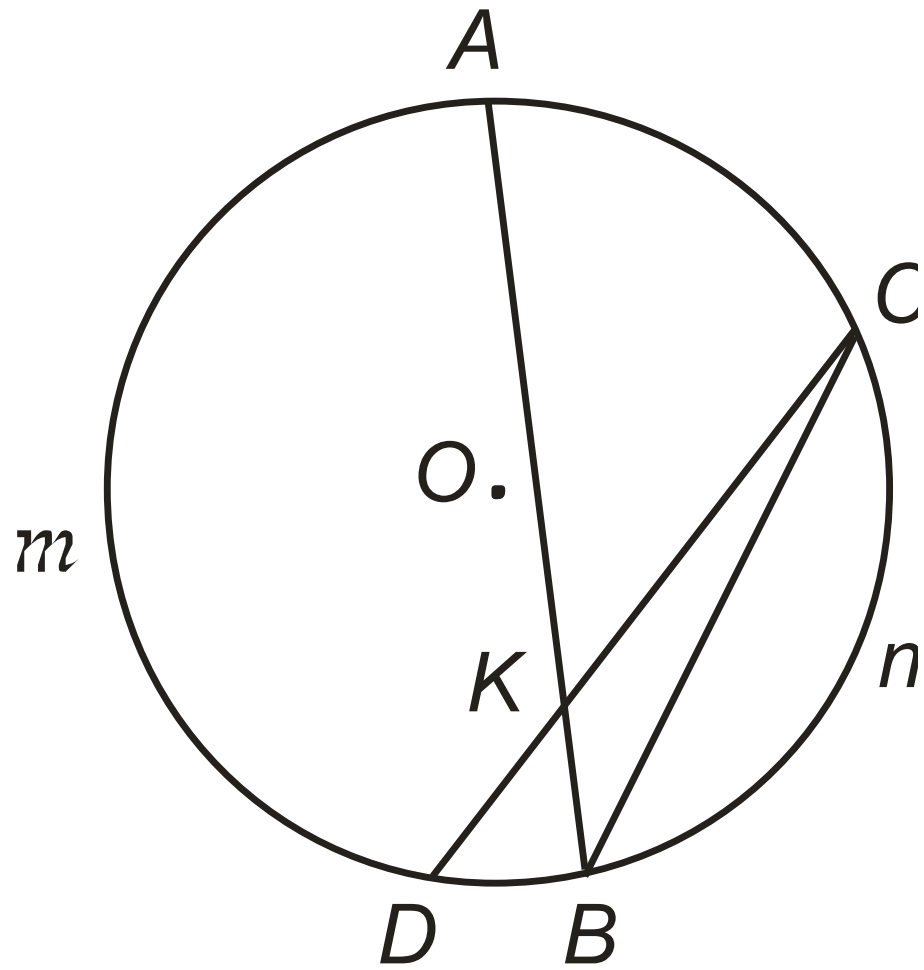
Исходя из определения касательной, $\angle OAC = 90^\circ$.

$$\text{Тогда } \beta = 90^\circ - \angle OAB = 90^\circ - \left(90^\circ - \frac{1}{2}\alpha\right) = \frac{1}{2}\alpha.$$

$$\text{Таким образом, } \beta = \frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2}\angle AOB.$$

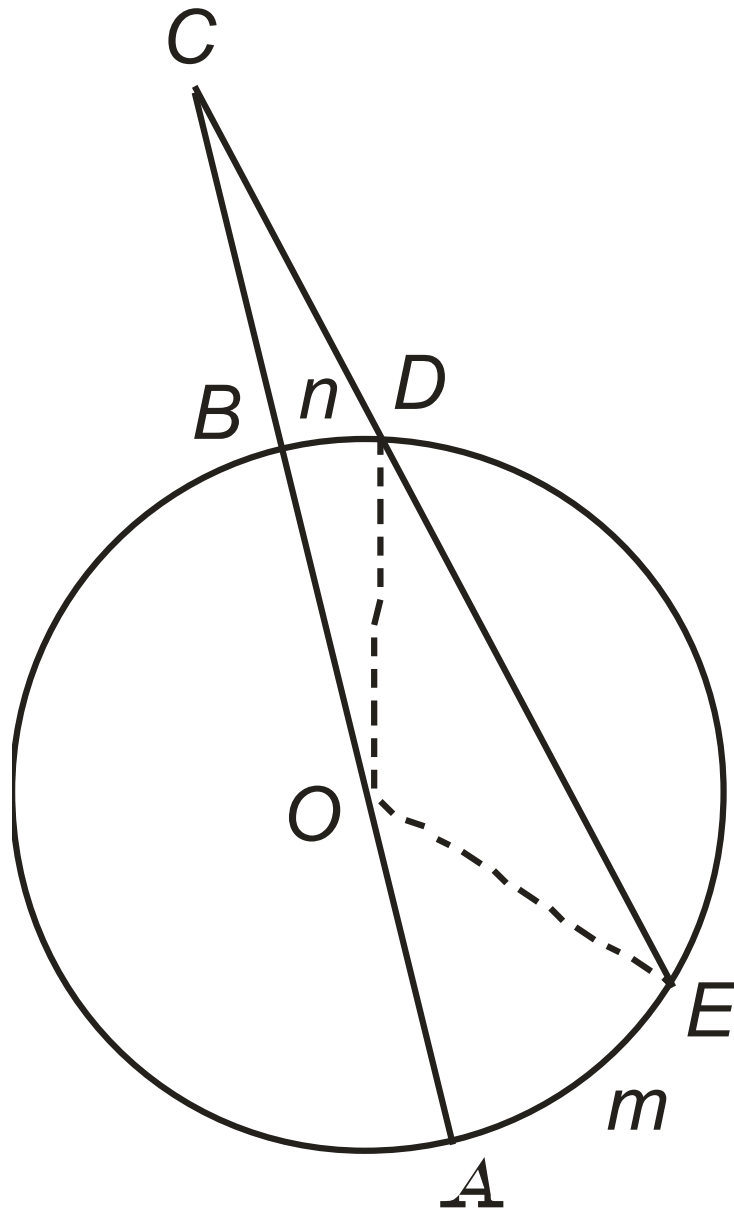
Задача 1

В окружности с центром O хорды AB и CD пересекаются в точке K и соответственно равны 9 и 12. Известно, что $AK > KB$ и $DK : KC = 1 : 5$. Найти хорду BC , если угол AOD равен 137° , угол COB равен 73° и угол BCD равен 15° .



Задача 2

Диаметр AB окружности с центром O и радиусом, равным 8, продолжили за точку B и на продолжении отметили точку C . Из точки C провели секущую, пересекающую окружность в точках D и E , считая от точки C . Центральный угол, опирающийся на дугу BD , равен 30° , а на дугу AE — 75° . Найти площадь треугольника COD .



Задача 3

В треугольнике ABC угол BAC равен 60° , угол ABC равен 75° , сторона BC равна 4, а AD — высота. Окружность, касающаяся стороны BC в точке D , пересекает сторону AB в точках P и K . Найдите площадь треугольника BKD , если $AP : PB = 1 : 2$ и точка K принадлежит отрезку PB

