Серии последовательно усложняющихся заданий

Вебинар №5 22.01 2016 г
Черноусенко Т.И.,
доцент кафедры ЕМД и ИТ

Технология решения геометрических задач

- Чтение условия задачи
- Выполнение чертежа
- Краткая запись условия (формирование базы данных). Перенос данных условия на чертеж
- Запись требуемых формул и теорем (формирование базы знаний)

Технология решения геометрических задач

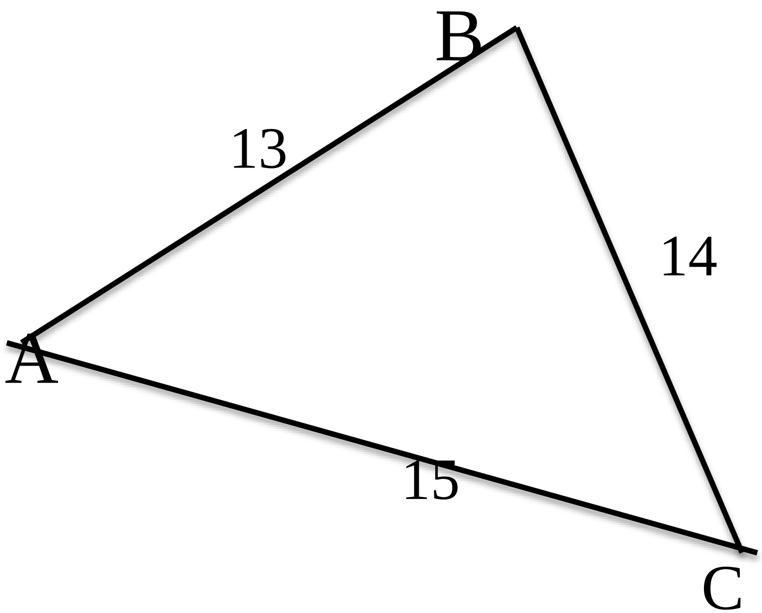
- «Деталировка» – вычерчивание отдельных деталей на дополнительных чертежах
- Анализ данных задачи, привязка искомых величин к элементам чертежа
- Реализация алгоритма решения
- Проверка правильности решения
- Запись ответа

Технология усложняющихся упражнений

В треугольнике АВС заданы стороны $AB=c=13$, $BC=a=14$,, $AC=b=15$. Определите:

1) площадь S;
2) h_b – высоту BD;
3) радиус вписанной окружности r;
4) величину наибольшего внутреннего угла этого треугольника;
5) радиус описанной окружности R;
6) m_b – длину медианы BF;
7) l_b-длину биссектрисы BE угла В (точка У лежит на отрезке АС);
8) расстояние между точкой пересечения медиан G и центром описанной окружности O_o;
9) расстояние между центрами вписанной $O_в$ и описанной O_o окружностей

1. Определить площадь *S*



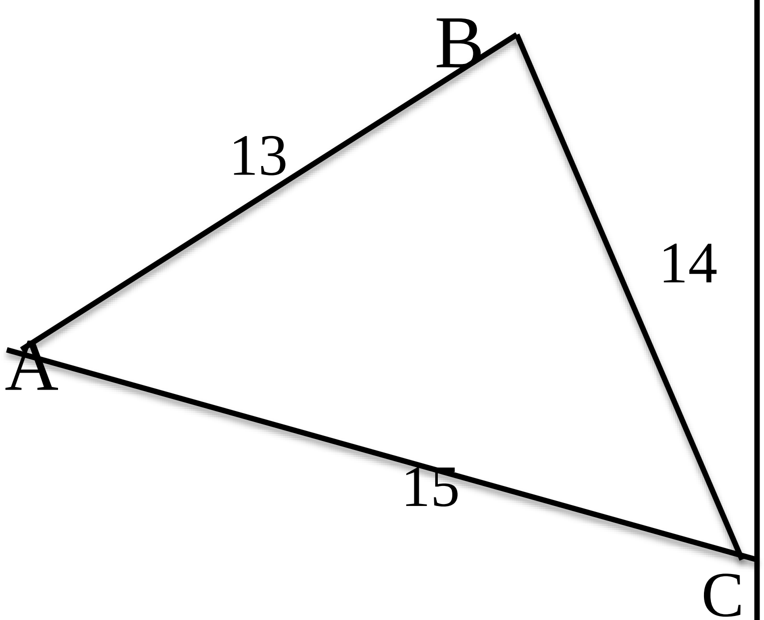
- База знаний:

1) $S=\frac{1}{2}\cdot b\cdot h_b$;
2) $S=\frac{1}{2}\cdot b\cdot c\cdot \sin A$;
3) $S=r\cdot p$
4) $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

- $p=\frac{1}{2}\cdot(a+b+c)$

$p=21$; $S=\sqrt{21\cdot 8\cdot 7\cdot 6}=84.$

2. Определить h_b – высоту *BD*

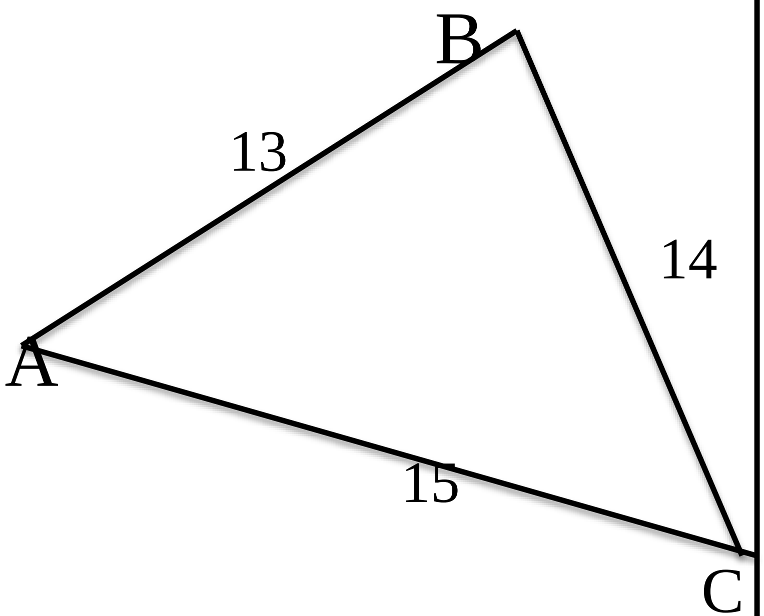


- База знаний:

1) $S = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h_b$;

$h_b = 2S/b = 2 \cdot 84/15 = 11{,}2.$

3. Определить радиус вписанной окружности *r*



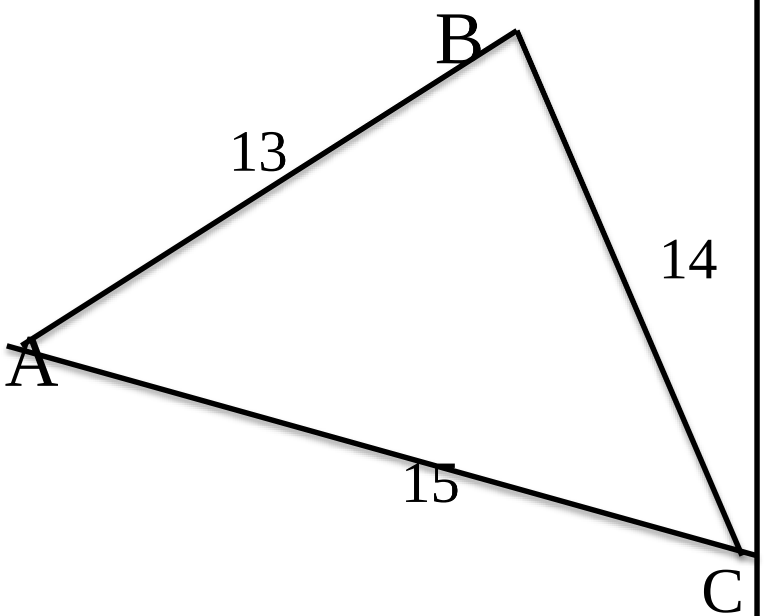
- База знаний:

3) $S = r \cdot p$

- $r = S : p$

  $r = 84 : 21 = 4.$

4. Определить величину наибольшего внутреннего угла этого треугольника



- База знаний:

Т.к. против большей стороны в треугольнике лежит больший угол, то большим углом в $\Delta\, ABC$ является угол B.

- *По аналогии с задачей (2) можно записать:*

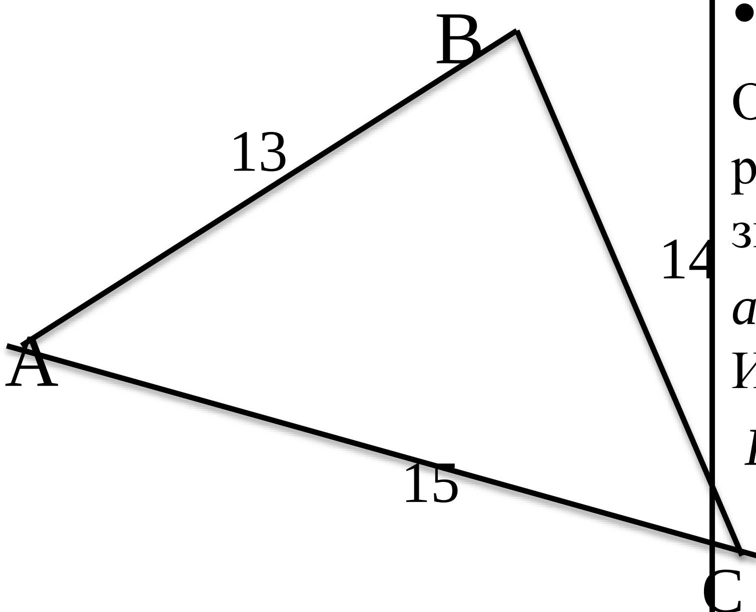
$$S=\tfrac{1}{2}\cdot a\cdot c\cdot \sin B;$$

отсюда $\sin B=2S:(a\cdot c);$

$\sin B=(2\cdot 84):(13\cdot 14)=12/13;$

$\cos B=\sqrt{1-\sin^2 B}=5/13.$

5. Определить радиус описанной окружности *R*



- База знаний:

Ответ на вопрос задачи о вычислении радиуса описанной окружности требует знания теоремы синусов:

a/sin A =b/sinB= c/sin C =(a·b·c):2S=2R (5).

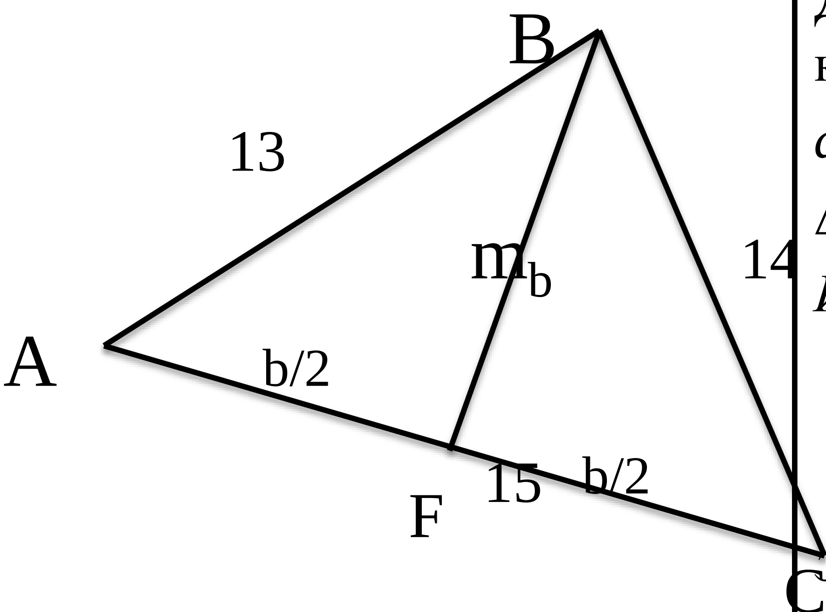
Из соотношения (5) следует, что

R=b/2sin B = (15·13):(2 ·12)= 65/8.

Этот же результат можно получить, применив формулу:

$$R = \frac{abc}{4S}$$

6. Определить m_b – длину медианы BF



Дважды применим теорему косинусов, которая для $\Delta\, ABC$ записывается так :

$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot cosA$. (*)

$\Delta\, ABF$: $m^2_b = c^2 + b^2/4 - b \cdot c \cdot cosA.$

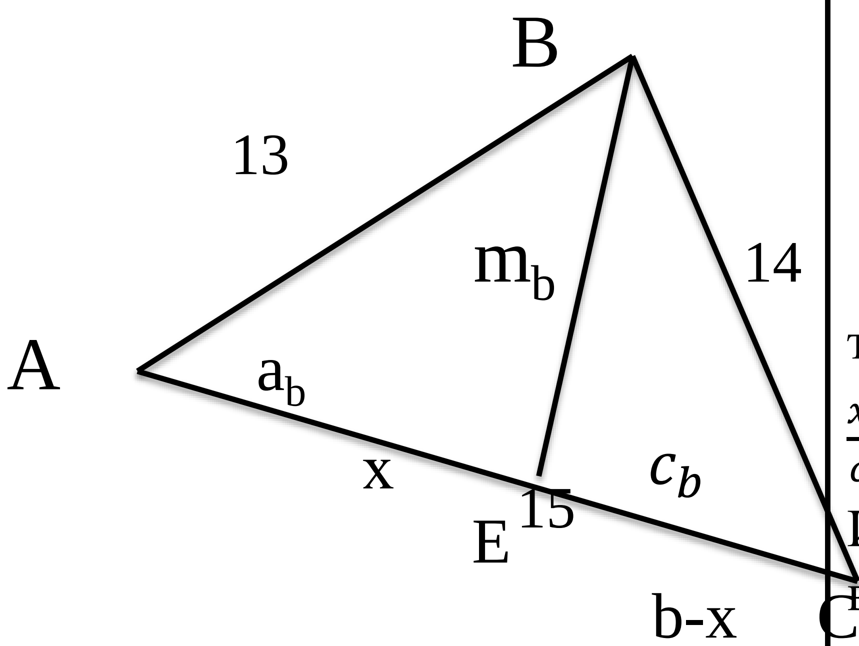
Из (*) : $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

После преобразований получаем

$$m_b = \frac{\sqrt{2(a^2+c^2)-b^2}}{2} = \frac{\sqrt{2(13^2+14^2)-15^2}}{2} = \frac{\sqrt{505}}{2}$$

Эту формулу можно получить, достроив Δ ABC до параллелограмма, в котором AC является диагональю, а BF – половиной другой диагонали. Тогда для вычисления m_b можно воспользоваться тем, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон.

7. Определить l_b-длину биссектрисы ВЕ угла В (точка Е лежит на отрезке АС)



Для решения задачи необходимо знание теоремы: ***Биссектриса внутреннего угла делит противолежащую сторону на части, пропорциональные сторонам, образующим этот угол.***

Пусть ***AE=x,*** тогда ***EC=b-x.*** Согласно теореме следует пропорция:

$\frac{x}{c} = \frac{b-x}{a}$, отсюда $x=\frac{bc}{b+c}$.

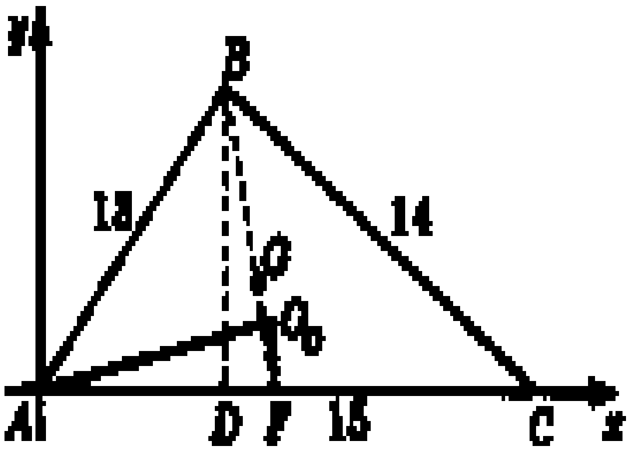
Используя теорему косинусов, из Δ *ABE* выражаем

$$l_b = \frac{\sqrt{ac((a+c)^2 - b^2)}}{a+c} = \frac{\sqrt{13\cdot 14\cdot((13+14)^2 - 15^2)}}{a+c} = $$

$$= \frac{28\sqrt{13}}{9}.$$

Можно применить формулу: $l_b=\sqrt{ac - abcb}$

8. Определить расстояние между точкой пересечения медиан G и центром описанной окружности O_o



Применим метод координат

в системе координат *Oxy*:

A (0;0); B(c·cosA; c·sinA); C(b;0);

D(c·cosA;0); F($\frac{b}{2}$ *;0).*

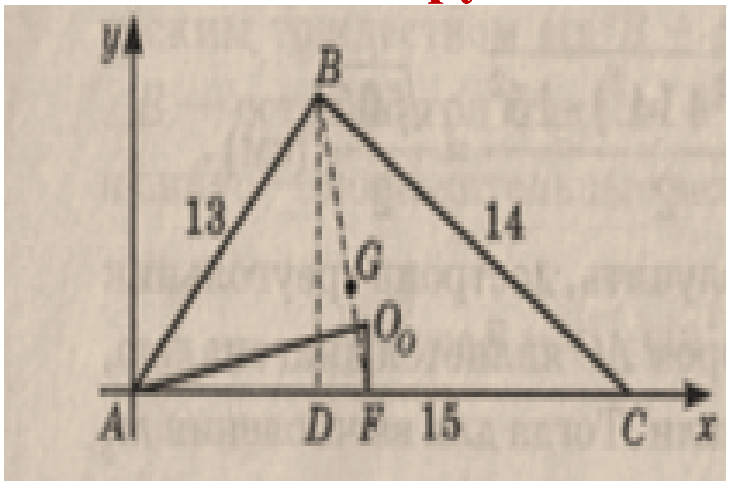
Для определения координат точки пересечения медиан *G* необходимо внести в базу знаний следующие факты:

- точка *G делит медиану BF на отрезки BG и GF, отношение длин которых равно 2:1;*
- *точка G, делящая данный отрезок BF в отношении m:n, имеет координаты:*

$$x_G=\frac{nx_B+mx_F}{n+m} = \quad y_G=\frac{ny_B+my_F}{n+m}$$

- $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{33}{65};\ \sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\frac{56}{65}$

8. Определить расстояние между точкой пересечения медиан G и центром описанной окружности O_o (продолжение)



Вычислим координаты точки G:

$$x_G = \frac{n \cdot x_B + 2}{3} = \frac{c \cdot cosA + b}{3} = \frac{36}{5};$$

$$y_G = \frac{n \cdot y_B + m y_F}{n+m} = \frac{c \cdot sinA + 0}{3} = \frac{56}{15};$$

$G(\frac{36}{5}; \frac{56}{15})$- точка пересечения медиан.

Для определения координат центра описанной окружности $\mathbf{O_o}$ необходимо знать, *что точка* $\mathbf{O_o}$ лежит на пересечении серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.

$\Delta\, AFO_O$: $AF = \frac{b}{2} = 7{,}5;$ $AO_o = R = 8\frac{1}{8}$

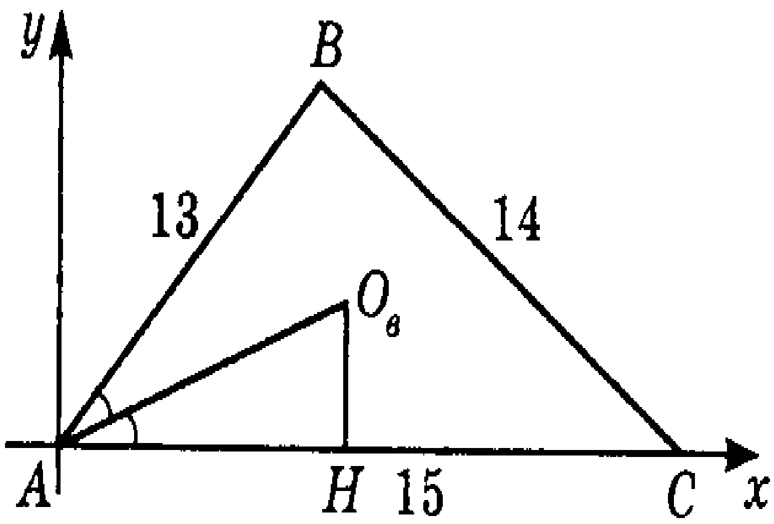
По теореме Пифагора $F0_o = \sqrt{AO_o{}^2 - AF^2} = 3\frac{1}{8}$.

Значит, $O_o(7\frac{1}{2}; 3\frac{1}{8}.)$ – центр описанной окружности.

По формуле для вычисления расстояния между двумя точками имеем

$$GO_o = \sqrt{(\frac{15}{2} - \frac{36}{5})^2 + \left(\frac{25}{8} - \frac{56}{14}\right)^2} = \frac{\sqrt{265}}{24}.$$

8. Определить расстояние между точкой пересечения медиан G и центром описанной окружности O_o (продолжение)



При решении учтем, что $O_o(8{,}125;\ 3{,}125)$ – центр описанной окружности- найден (см. задачу 8).

Зная, что $O_в$ лежит на пересечении биссектрис внутренних углов треугольника, рассмотрим прямоугольный треугольник $AO_вH$.

$O_вH = r = 4$. $\angle O_вAH = \frac{1}{2}\angle BAC$. Тогда катет

$AH = r \cdot ctg\angle O_в AH$.

Применив формулу $ctg\,\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$ и учитывая найденные ранее значения $\sin A = \frac{56}{65}$; $\cos A = \frac{33}{65}$, получаем

$ctg\angle O_в AH = \frac{7}{4}$; $AH = 4\cdot\frac{7}{4} = 7$. Таким образом, $O_в\ (7;\ 4)$.

Внесем в базу знаний формулу для вычисления расстояния между точками

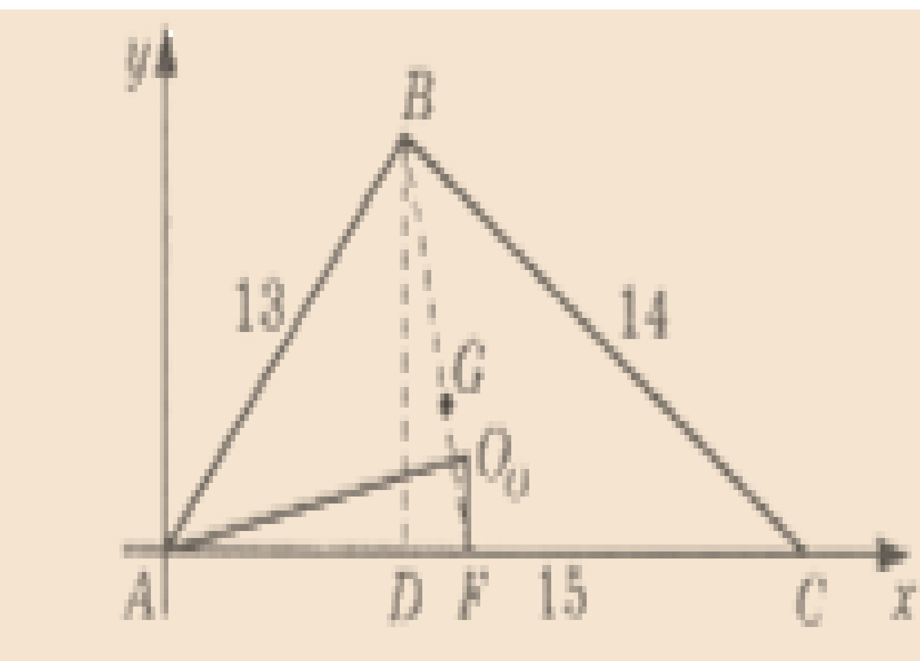
$AB = \sqrt{(xB\ - xA)^2 - b^2}$

8. Определить расстояние между точкой пересечения медиан G и центром описанной окружности O_o (продолжение)

Учитывая, что $\boldsymbol{G(\frac{36}{5};\ \frac{56}{15})}$, $O_в\ (7;\ 4)$, $\boldsymbol{O_o(\frac{15}{2};\ \frac{25}{8})}$

получаем $\boldsymbol{GO_o = \frac{\sqrt{265}}{24}}$

9. Определить расстояние между центрами вписанной $O_в$ и описанной O_o окружностей



$$O_B O_O = \frac{\sqrt{65}}{8}$$

Серии последовательно усложняющихся заданий (I)

Решите неравенства

1. $\log_4 \dfrac{x-11}{x-8} \geq 0$

2. $\log_{0,5x-1} \dfrac{x-11}{x-8} \geq 0$

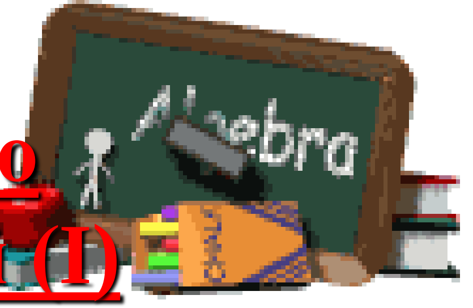
3. $\log_{0,5x-1}\left(\log_4 \dfrac{x-11}{x-8}\right) \geq 0$

Серии последовательно усложняющихся заданий (I)

4. Найдите сумму всех целых чисел, каждое из которых находится между двумя другими целыми числами, являющимися решениями неравенства

$$\log_{0,5x-1}\left(\log_4 \frac{x-11}{x-8}\right) \geq 0$$

Серии последовательно усложняющихся заданий (I)



5. Сколько членов последовательности

$x_n = 100 \cdot 2^{-n}$, где $n \in N$, не являются решениями неравенства

$$\log_{0,5x-1}\left(\log_4 \frac{x-11}{x-8}\right) \geq 0$$

6. Решите неравенство

$$\log_4\left(\log_{0,5x-1} \frac{x-11}{x-8}\right) \geq 0$$

Серии последовательно усложняющихся заданий (II)

Решите уравнения

$$1)\ 3^x - 8\cdot 3^{\frac{x}{2}} + 15 = 0$$

$$2)\ 3\cdot 25^x - 8\cdot 15^x + 5\cdot 9^x = 0$$

$$3)\ 9^{x+0,5} + 4^{x-0,5} = 10\cdot 6^{x-0,5}$$

$$4)\ (\sqrt{3+2\sqrt{2}})^x + (\sqrt{3-2\sqrt{2}})^x = 6$$

$$5)\ (\sqrt{3}-1)^{x+1} - (\sqrt{3}+1)^{x-1} = \sqrt{3\cdot 2^{x-1}}$$