Геометрия на ЕГЭ

Черноусенко Т.И.,

доцент кафедры МД, ИТ и ДО

Матюхина И.А.,

ст. преподаватель кафедры МД, ИТ и ДО

В формате ЕГЭ 2014 года

задания B5, B8, B10, B13, C2 и C4 – геометрические:

9 первичных баллов из 33 – 27,3%

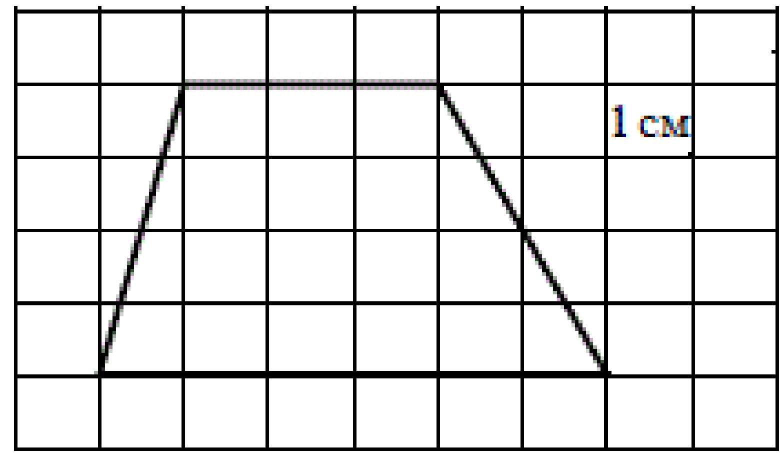
Задание В5

Для успешного решения задач типа В5 необходимо:

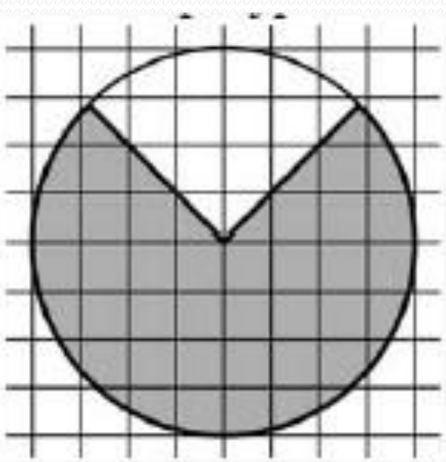
- **Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами**
- **Решать планиметрические задачи на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей)**
- **Моделировать реальные ситуации на языке геометрии, исследовать построенные модели с использованием геометрических понятий и теорем, аппарата алгебры; решать практические задачи, связанные с нахождение геометрических величин**
- **Повторить материал по темам:**
- **Планиметрия**
- **Треугольник**
- **Параллелограмм, прямоугольник, ромб, квадрат, трапеция**
- **Окружность и круг**
- **Площадь треугольника, параллелограмма, трапеции, круга, сектора**

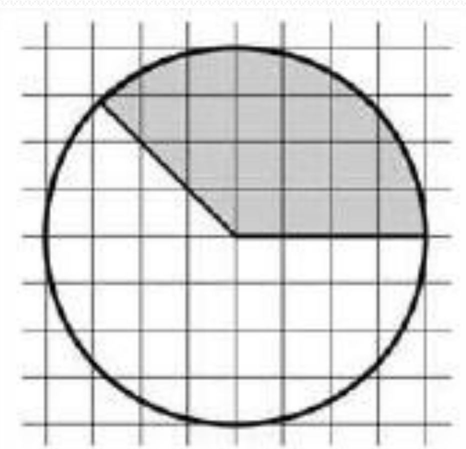
В 5

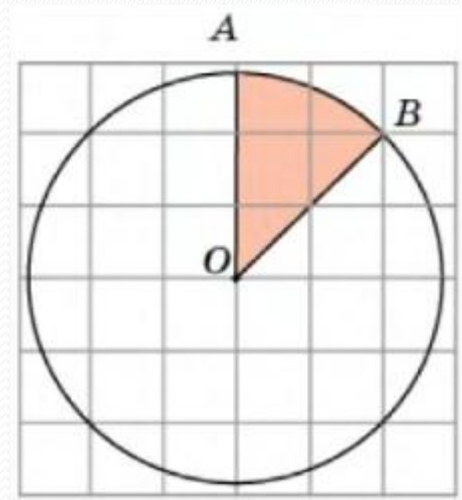
Найдите площадь четырёхугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рисунок). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



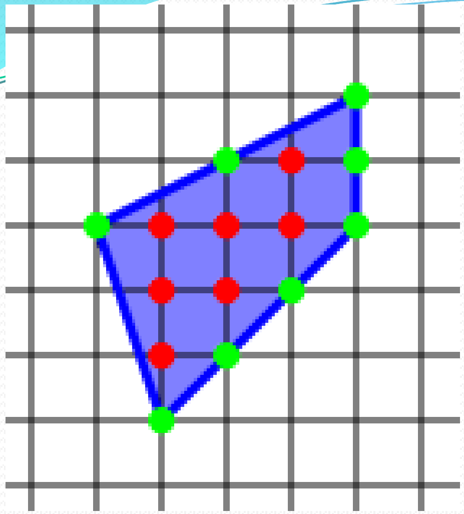
На клетчатой бумаге нарисован круг, площадь которого равна 16. Найдите площадь закрашенной фигуры.







Формула Пика (или теорема Пика)

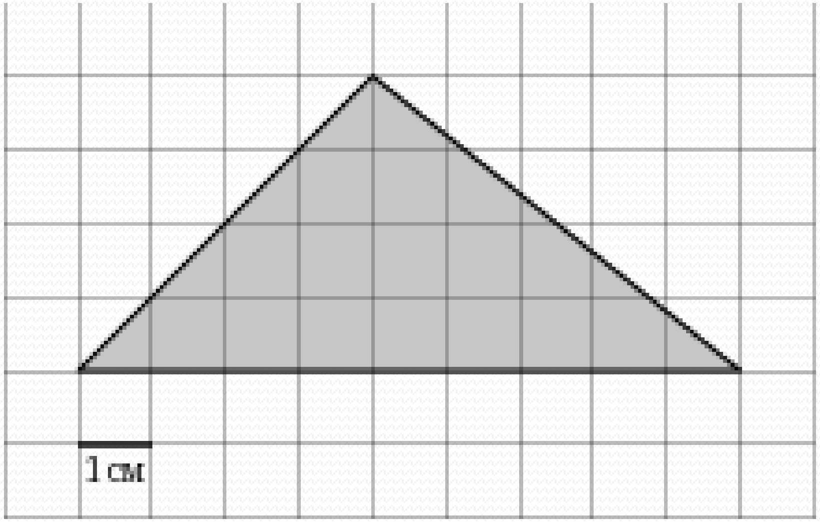


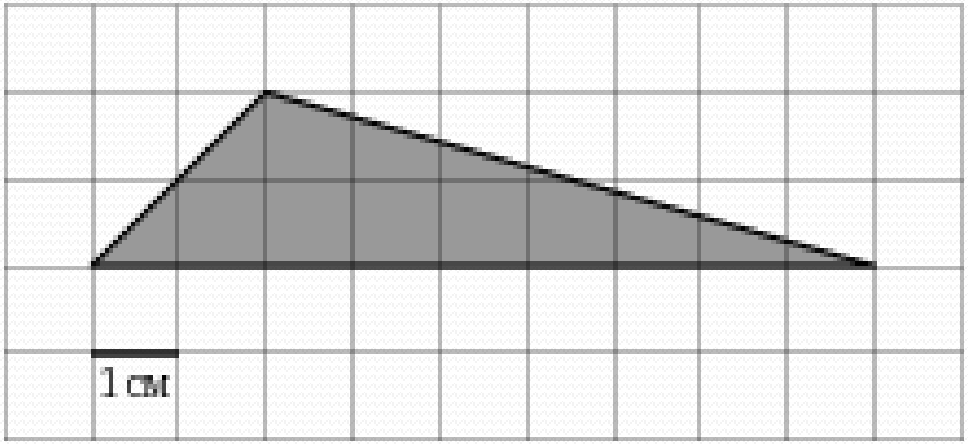
Площадь многоугольника с целочисленными вершинами равна

В + **Г/2** − **1**,

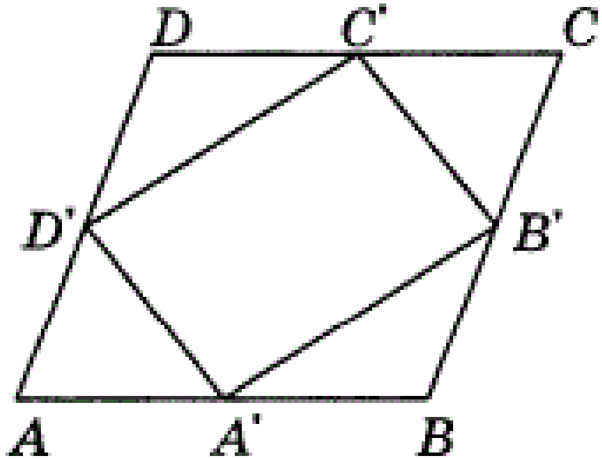
где **В** есть количество целочисленных точек внутри многоугольника,

а **Г** — количество целочисленных точек на границе многоугольника. Формула Пика

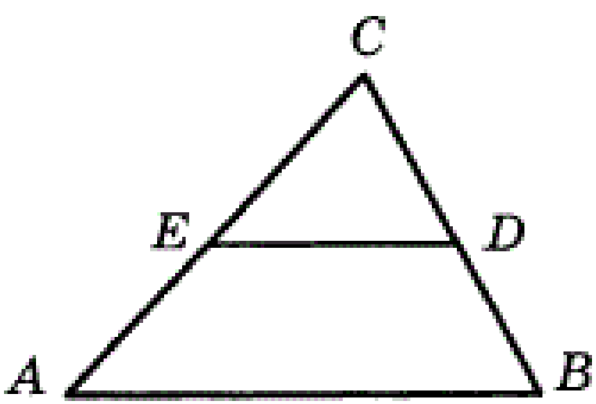




Площадь параллелограмма $ABCD$ равна 6. Найдите площадь параллелограмма $A'B'C'D'$, вершинами которого являются середины сторон данного параллелограмма.



Площадь треугольника ABC равна 28. DE — средняя линия. Найдите площадь трапеции $ABDE$.



Задание В8

Для успешного решения задач типа В8 необходимо:

- **Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами**
- **Решать планиметрические задачи на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей)**
- **Вычислять значения числовых и буквенных выражений, осуществляя необходимые подстановки и преобразования**
- **Проводить по известным формулам и правилам преобразования буквенных выражений, включающих степени, радикалы, логарифмы и тригонометрические функции**

Повторить материал по темам:

Треугольник (Величина угла, градусная мера угла, соответствие между величиной угла и длиной дуги окружности)

Числа, корни и степени (Целые числа. Степень с натуральным показателем. Дроби, проценты, рациональные числа. Степень с целым показателем. Корень степени n>1 и его свойства. Степень с рациональным показателем и ее свойства. Свойства степени с действительным показателем)

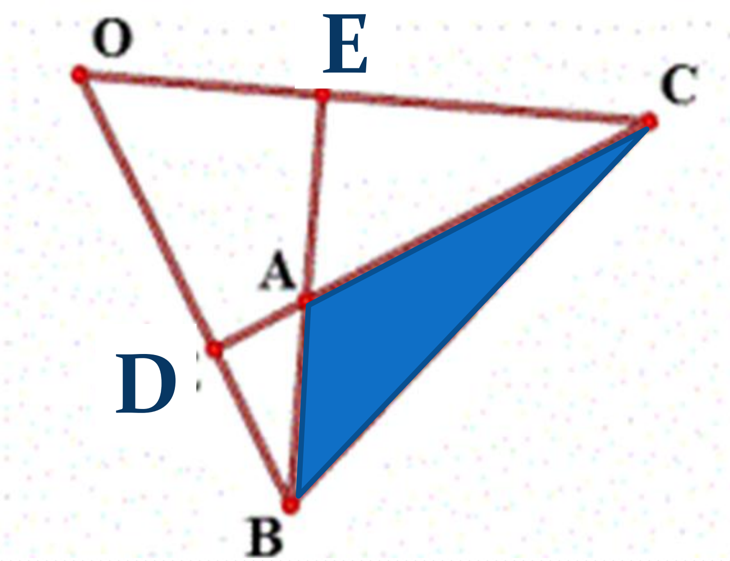
Синус, косинус, тангенс, котангенс произвольного угла (Радианная мера угла. Синус, косинус, тангенс и котангенс числа . Основные тригонометрические тождества. Формулы приведения. Синус, косинус и тангенс суммы и разности двух углов. Синус и косинус двойного угла)

Преобразования выражений (Преобразования выражений, включающих арифметические операции. Преобразования выражений, включающих операцию возведения в степень. Преобразования выражений, включающих корни натуральной степени. Преобразования тригонометрических выражений. Преобразование выражений, включающих операцию логарифмирования)

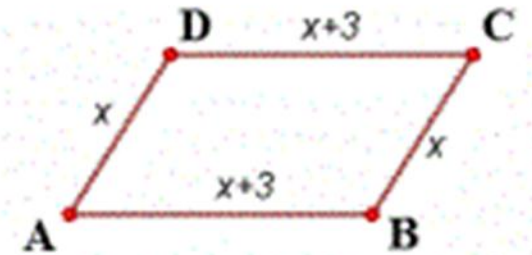
Модуль (абсолютная величина) числа

В 8

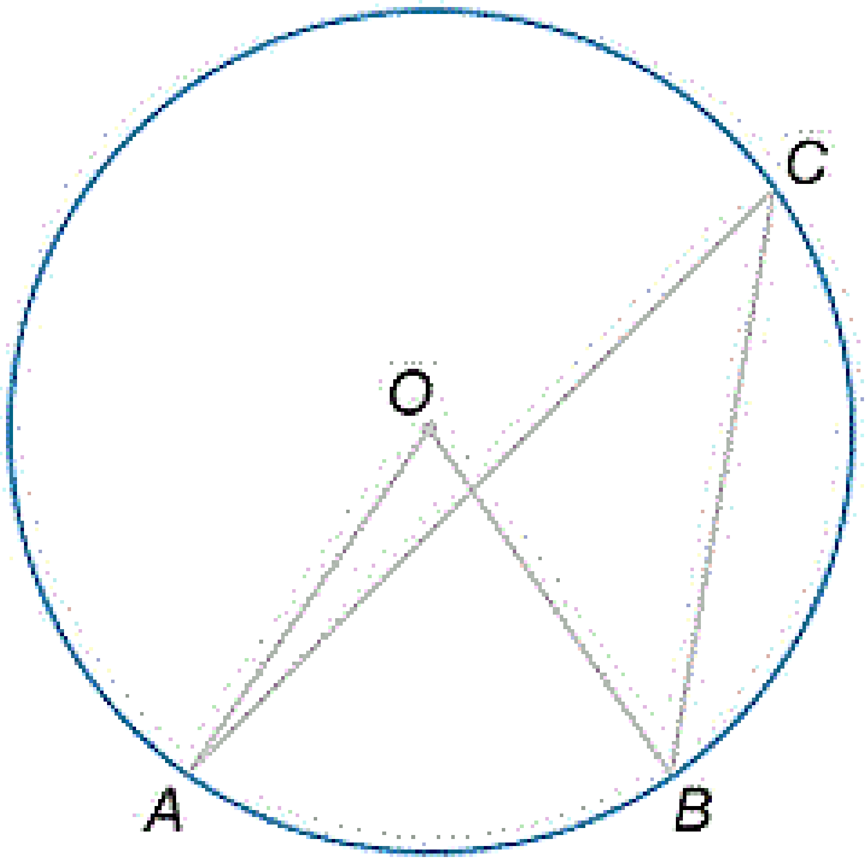
В треугольнике ABC угол A равен 126 градусам, а углы B и C острые. BD и CE — высоты, пересекающиеся в точке O. Найдите угол DOE. Ответ дайте в градусах.



Периметр параллелограмма равен 12. Одна сторона параллелограмма на 3 больше другой. Найдите меньшую сторону параллелограмма.



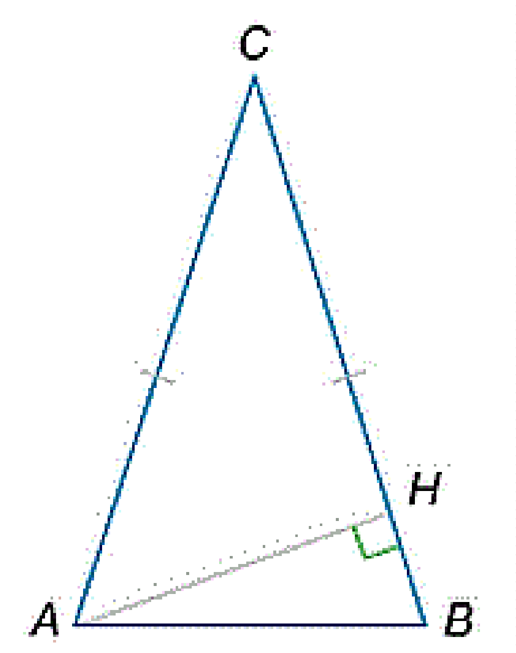
Центральный угол на 36° больше острого вписанного угла, опирающегося на ту же дугу окружности.



Найдите вписанный угол. Ответ дайте в градусах.

Треугольник ABC вписан в окружность с центром O . Найдите угол BOC , если угол BAC равен 32°

В равнобедренном треугольнике ABC угол при вершине C равен 30 ^{0}, а боковые стороны AC = BC = 72. Найти высоту AH.



Задание B10:

Для успешного решения задач типа B10 необходимо:

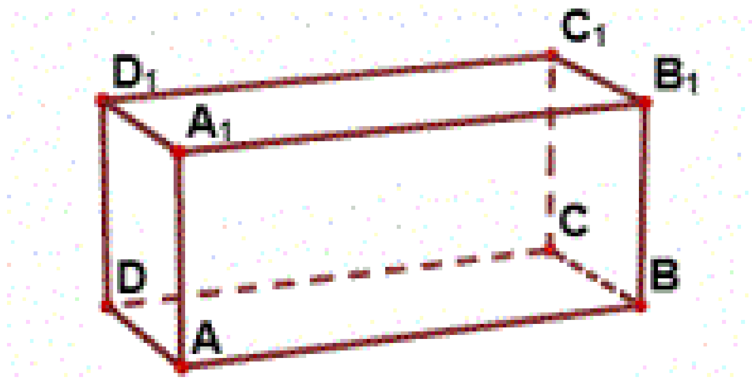
- **Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами**
- **Решать простейшие стереометрические задачи на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей, объемов);**
- **Использовать при решении стереометрических задач планиметрические факты и методы**

Повторить материал по темам:

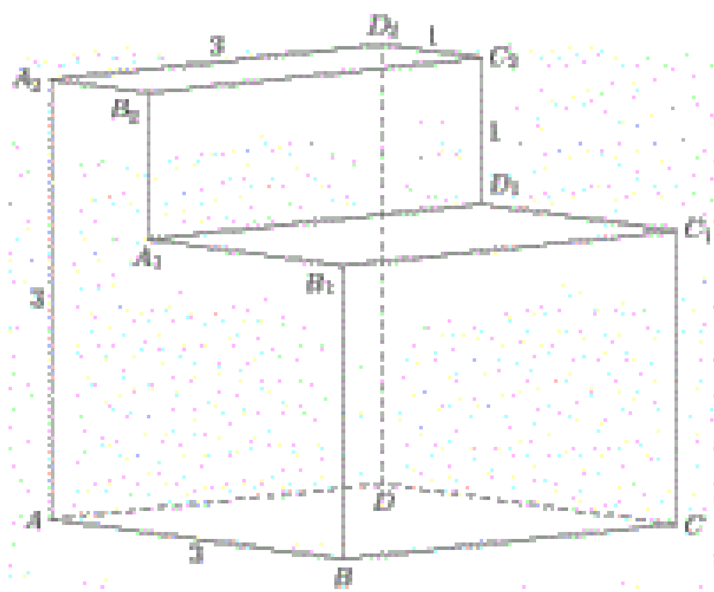
- Многогранники (Призма, ее основания, боковые ребра, высота, боковая поверхность; прямая призма; правильная призма. Параллелепипед; куб; симметрии в кубе, в параллелепипеде. Пирамида, ее основание, боковые ребра, высота, боковая поверхность; треугольная пирамида; правильная пирамида. Сечения куба, призмы, пирамиды. Представление о правильных многогранниках (тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр и икосаэдр))
- Измерение геометрических величин (Величина угла, градусная мера угла, соответствие между величиной угла и длиной дуги окружности. Угол между прямыми в пространстве; угол между прямой и плоскостью. Длина отрезка, ломаной, окружности, периметр многоугольника)
- Расстояние от точки до прямой, от точки до плоскости; расстояние между параллельными прямыми, параллельными плоскостями
- Площадь треугольника, параллелограмма, трапеции, круга, сектора
- Площадь поверхности конуса, цилиндра, сферы
- Объем куба, прямоугольного параллелепипеда, пирамиды, призмы, цилиндра, конуса, шара

B 10

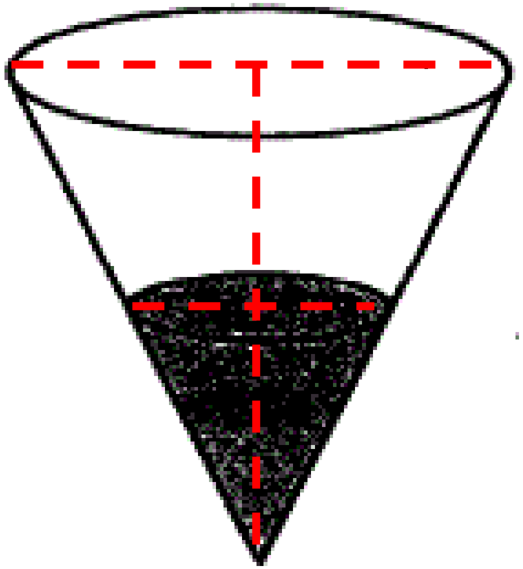
Найдите квадрат расстояния между вершинами B и D1 прямоугольного параллелепипеда, для которого AB=4, AD=6, AA1=5.



Найдите угол CAD2 многогранника, изображенного на рисунке. Все двугранные углы многогранника прямые. Ответ дайте в градусах.



В сосуд, имеющий форму конуса, налили 25 мл жидкости до половины высоты сосуда (см. рис.) Сколько миллилитров жидкости нужно долить в сосуд, чтобы заполнить его доверху?



Задание В13

Для успешного решения задач типа В13 необходимо:

- **Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами**
- **Решать простейшие стереометрические задачи на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей, объемов);**
- **использовать при решении стереометрических задач**
- **планиметрические факты и методы**

Повторить материал по темам:

Прямые и плоскости в пространстве
Пересекающиеся, параллельные и скрещивающиеся прямые,
перпендикулярность прямых
Параллельность прямой и плоскости, признаки и свойства
Параллельность плоскостей, признаки и свойства
Перпендикулярность прямой и плоскости, признаки и свойства;
перпендикуляр и наклонная; теорема о трех перпендикулярах
Перпендикулярность плоскостей, признаки и свойства
Параллельное проектирование. Изображение пространственных фигур

Многогранники
Призма, ее основания, боковые ребра, высота, боковая поверхность; прямая призма; правильная призма
Параллелепипед; куб; симметрии в кубе, в параллелепипеде
Пирамида, ее основание, боковые ребра, высота, боковая поверхность; треугольная пирамида; правильная пирамида
Сечения куба, призмы, пирамиды
Представление о правильных многогранниках (тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр и икосаэдр)
Тела и поверхности вращения
Цилиндр. Основание, высота, боковая поверхность, образующая, развертка
Конус. Основание, высота, боковая поверхность, образующая, развертка
Шар и сфера, их сечения
Величина угла, градусная мера угла, соответствие между величиной угла и длиной дуги окружности
Угол между прямыми в пространстве; угол между прямой и плоскостью
Длина отрезка, ломаной, окружности, периметр многоугольника
Расстояние от точки до прямой, от точки до плоскости; расстояние между параллельными прямыми, параллельными плоскостями
Площадь треугольника, параллелограмма, трапеции, круга, сектора
Площадь поверхности конуса, цилиндра, сферы
Объем куба, прямоугольного параллелепипеда, пирамиды, призмы, цилиндра, конуса, шара

Изображение пространственных фигур
Призма, ее основания, боковые ребра, высота, боковая поверхность; прямая призма; правильная призма
Параллелепипед; куб; симметрии в кубе, в параллелепипеде
Пирамида, ее основание, боковые ребра, высота, боковая поверхность; треугольная пирамида; правильная пирамида
Сечения куба, призмы, пирамиды
Представление о правильных многогранниках (тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр и икосаэдр) Цилиндр. Основание, высота, боковая поверхность, образующая, развертка
Конус. Основание, высота, боковая поверхность, образующая, развертка
Шар и сфера, их сечения
Угол между прямыми в пространстве; угол между прямой и плоскостью
Длина отрезка, ломаной, окружности, периметр многоугольника
Расстояние от точки до прямой, от точки до плоскости; расстояние между параллельными прямыми, параллельными плоскостями

Задания С2 на ЕГЭ.

Введение

- Задания **С2** ЕГЭ по стереометрии являются заданиями повышенного уровня сложности.
- Полное решение каждой задачи состоит из теоретической части, заключающейся в обосновании взаимного расположения элементов заданной стереометрической конфигурации, и вычислительной части.
- При проверке задачи **С2** выставление производится в соответствии со следующими критериями

Критерии оценивания заданий С2

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено, или при правильном ответе решение недостаточно обосновано	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Методы решения стереометрических задач

Расстояние между точками	**1. Поэтапно-вычислительный метод** **2. Векторный метод** **3. Координатный метод**
Расстояние от точки до прямой	1. Поэтапно-вычислительный метод 2. Векторный метод 3. Координатный метод 4. Метод параллельных прямых
Расстояние от точки до плоскости	1. Поэтапно-вычислительный метод 2. Векторный метод 3. Координатный метод 4. Метод параллельных прямых и плоскостей 5. Метод объемов 6. Метод опорных задач

Методы решения стереометрических задач

Расстояние между скрещивающимися прямыми	**1. Поэтапно-вычислительный метод или метод построения общего перпендикуляра** **2.Метод параллельных прямой и плоскости** **3. Метод параллельных плоскостей** **4. Метод ортогонального проектирования** **5. Векторный метод** **6. Координатный метод** **7. Метод опорных задач**
Угол между двумя прямыми	1. Поэтапно-вычислительный метод 2. Векторный метод 3. Координатный метод 4. Метод опорных задач

Методы решения стереометрических задач

Угол между прямой и плоскостью	**1.Поэтапно-вычислительный метод** **2. Векторный метод** **3. Координатный метод** **4.Метод использования дополнительного угла** **5. Метод опорных задач**
Угол между плоскостями	1. Поэтапно-вычислительный метод 2. Метод параллельных прямых 3. Метод параллельных плоскостей 4. Метод использования перпендикуляров к плоскостям 5. Метод использования векторов нормалей пересекающихся плоскостей 6. Метод использования направляющих векторов скрещивающихся прямых, перпендикулярных данным плоскостям 7. Векторный метод 8. Координатный метод

Решение задания С2 координатным методом

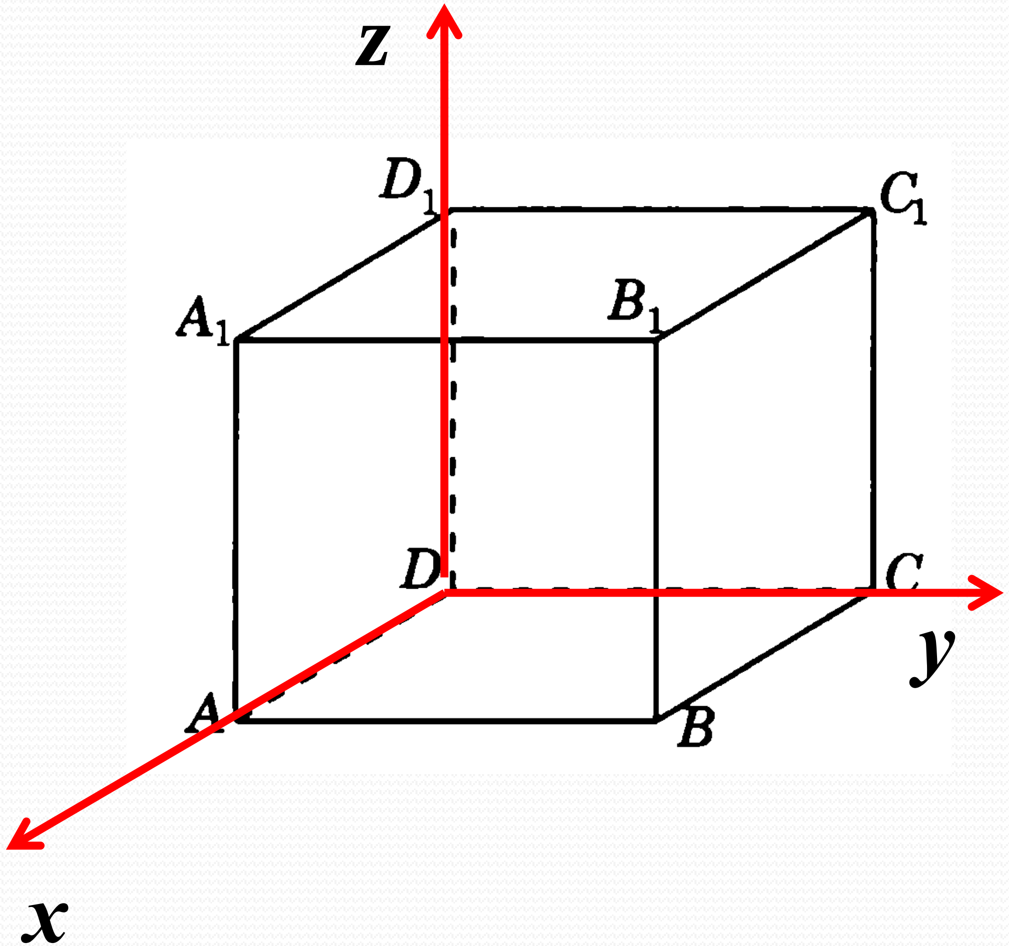
Помните

При решении задачи координатным или векторным методами выпускник должен получить правильный ответ, и только тогда его решение будет оценено в 2 балла. В противном случае его решение не соответствует приведенным критериям и будет оценено в 0 баллов.

Координаты вершин многогранников в декартовой системе координат

Рациональное расположение фигуры относительно системы координат (некоторые вершины многогранника находятся на координатных осях) позволяет при решении задач упростить вычисления

Единичный куб



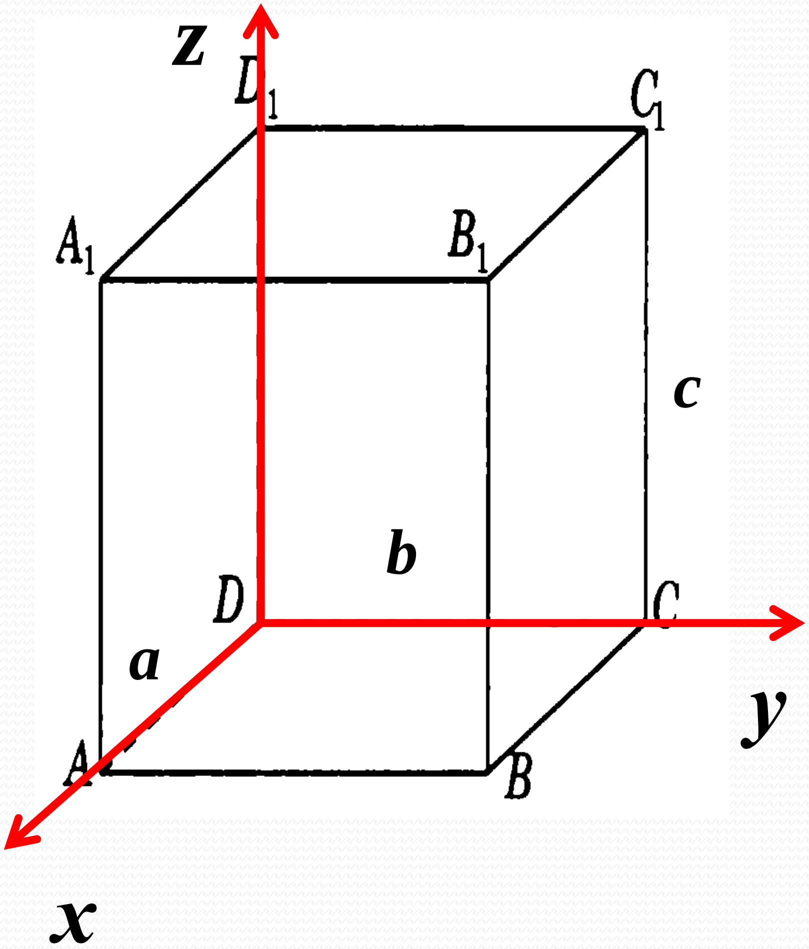
D (0; 0; 0) D_1 (0; 0; 1)

A (1; 0; 0) A_1 (1; 0; 1)

C (0; 1; 0) C_1 (0; 1; 1)

B (1; 1; 0) B_1 (1; 1; 1)

Прямоугольный параллелепипед



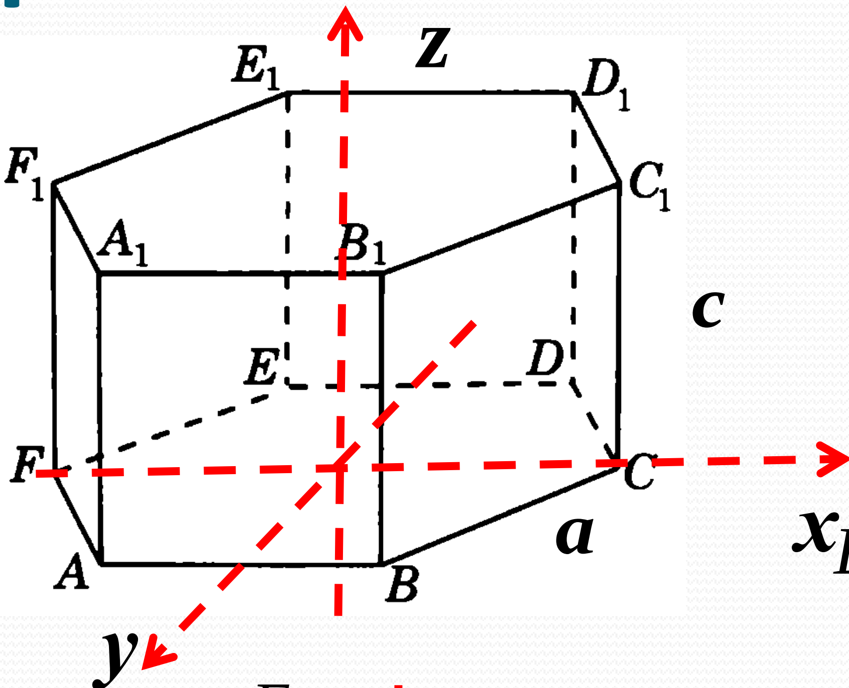
D (0; 0; 0)	D_1 (0; 0; c)

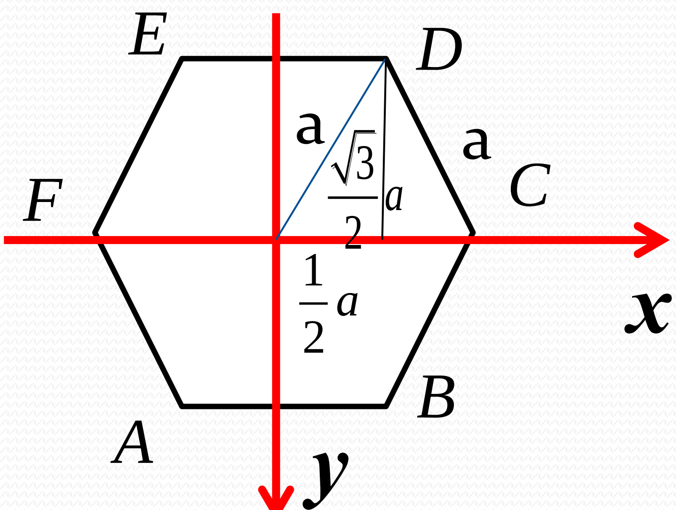
A (a; 0; 0)	A_1 (a; 0; c)

C (0; b; 0)	C_1 (0; b; c)

B (a; b; 0)	B_1 (a; b; c)

Правильная шестиугольная призма





$C\ (a;\ 0;0)$ $\quad C_1\ (a;\ 0;c)$

$F\ (-\ a;\ 0;0)$ $\quad F_1\ (-\ a;\ 0;c)$

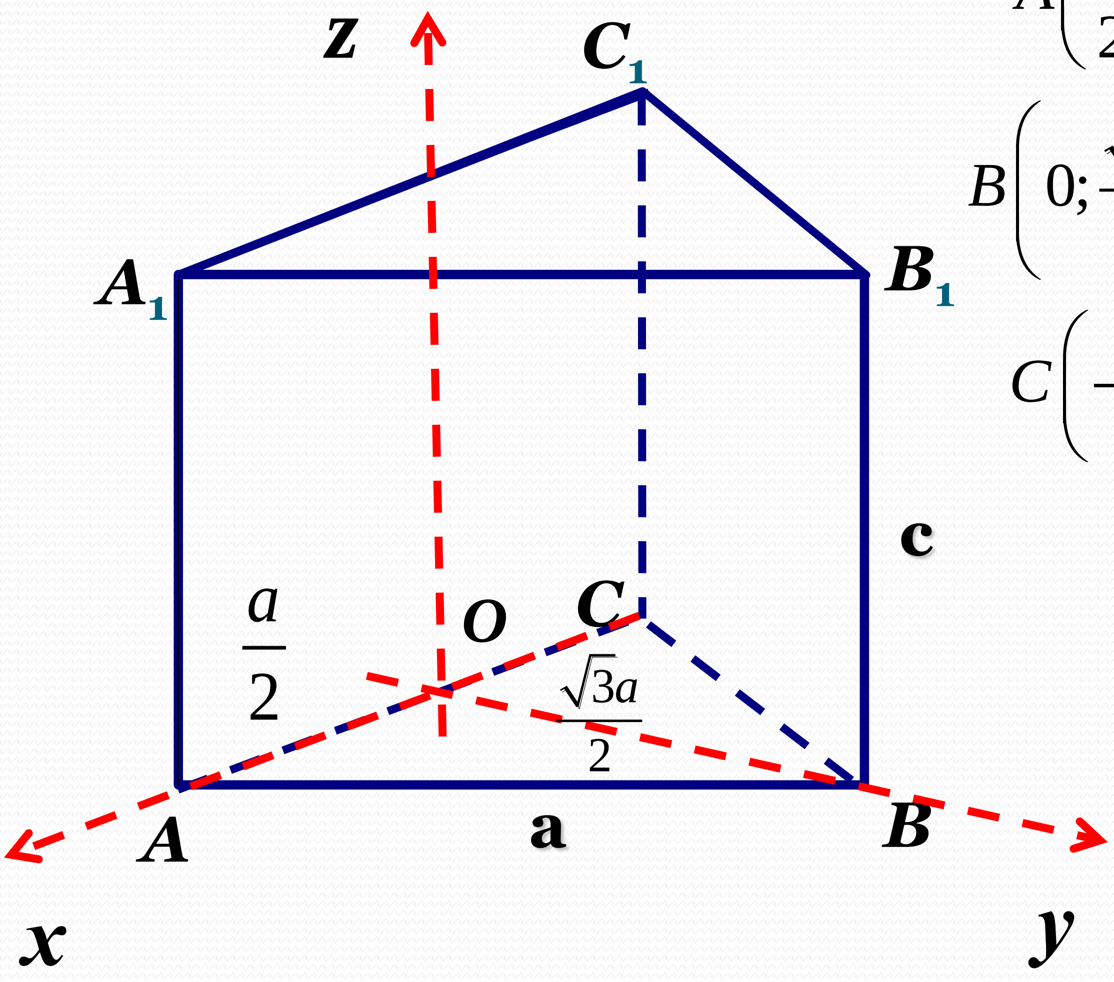
$D\left(\frac{a}{2};-\frac{\sqrt{3}a}{2};0\right)$ $\quad D_1\left(\frac{a}{2};-\frac{\sqrt{3}a}{2};c\right)$

$E\left(-\frac{a}{2};-\frac{\sqrt{3}a}{2};0\right)$ $\quad E_1\left(-\frac{a}{2};-\frac{\sqrt{3}a}{2};c\right)$

$A\left(-\frac{a}{2};\frac{\sqrt{3}a}{2};0\right)$ $\quad A_1\left(-\frac{a}{2};\frac{\sqrt{3}a}{2};c\right)$

$B\left(\frac{a}{2};\frac{\sqrt{3}a}{2};0\right)$ $\quad B_1\left(\frac{a}{2};\frac{\sqrt{3}a}{2};c\right)$

Правильная треугольная призма

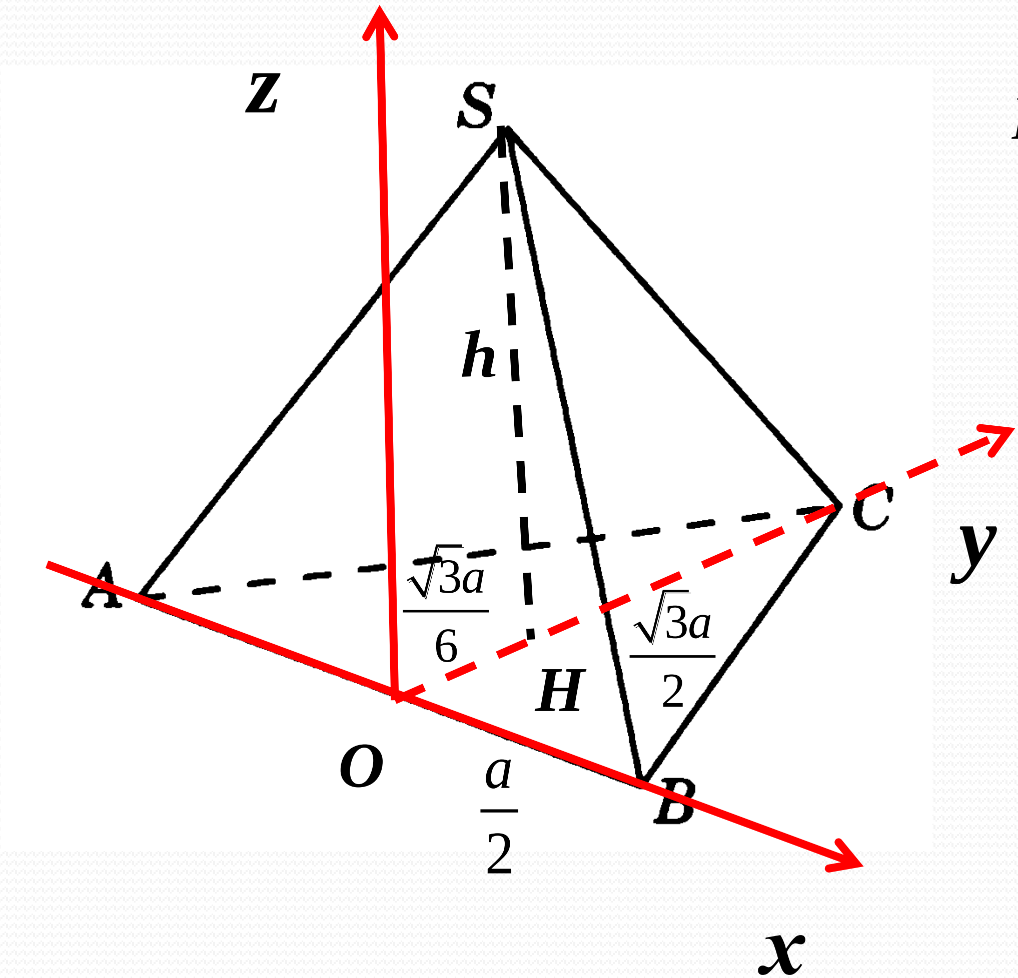


$A\left(\frac{a}{2};0;0\right)$ $A_1\left(\frac{a}{2};0;c\right)$

$B\left(0;\frac{\sqrt{3}a}{2};0\right)$ $B_1\left(0;\frac{\sqrt{3}a}{2};c\right)$

$C\left(-\frac{a}{2};0;0\right)$ $C_1\left(-\frac{a}{2};0;c\right)$

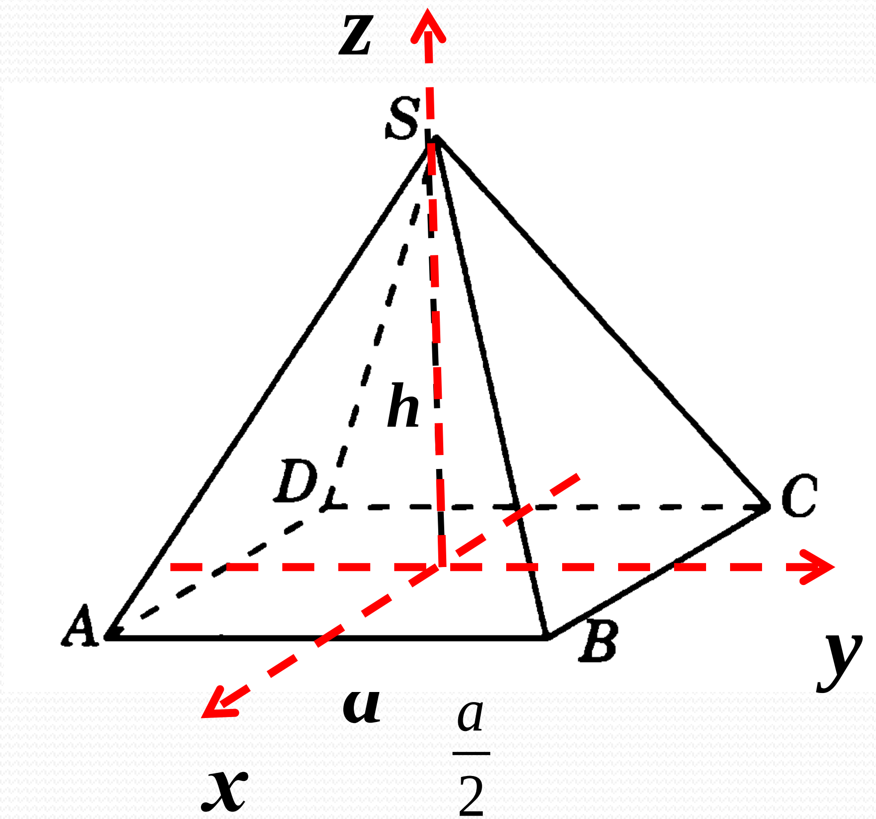
Правильная треугольная пирамида



$$B\left(\frac{a}{2};0;0\right) \qquad C\left(0;\frac{\sqrt{3}a}{2};0\right)$$

$$A\left(-\frac{a}{2};0;0\right) \qquad S\left(0;\frac{\sqrt{3}a}{6};h\right)$$

Правильная четырехугольная пирамида

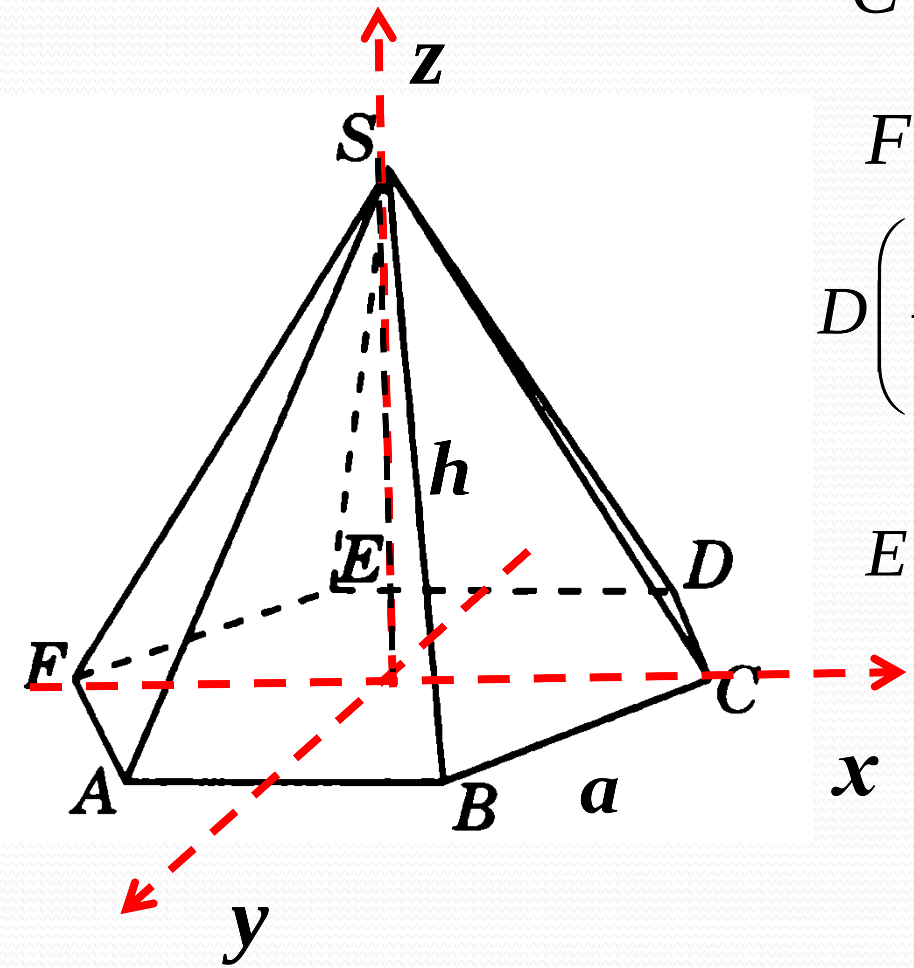


$B\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};0\right)$ $A\left(\frac{a}{2};-\frac{a}{2};0\right)$

$C\left(-\frac{a}{2};\frac{a}{2};0\right)$ $S\left(0;0;h\right)$

$D\left(-\frac{a}{2};-\frac{a}{2};0\right)$

Правильная шестиугольная пирамида



C (a; 0;0)

$A\left(-\frac{a}{2};\frac{\sqrt{3}a}{2};0\right)$

F (- a; 0;0)

$B\left(\frac{a}{2};\frac{\sqrt{3}a}{2};0\right)$

$D\left(\frac{a}{2};-\frac{\sqrt{3}a}{2};0\right)$

$E\left(-\frac{a}{2};-\frac{\sqrt{3}a}{2};0\right)$

$S\left(0;0;h\right)$

Задание.

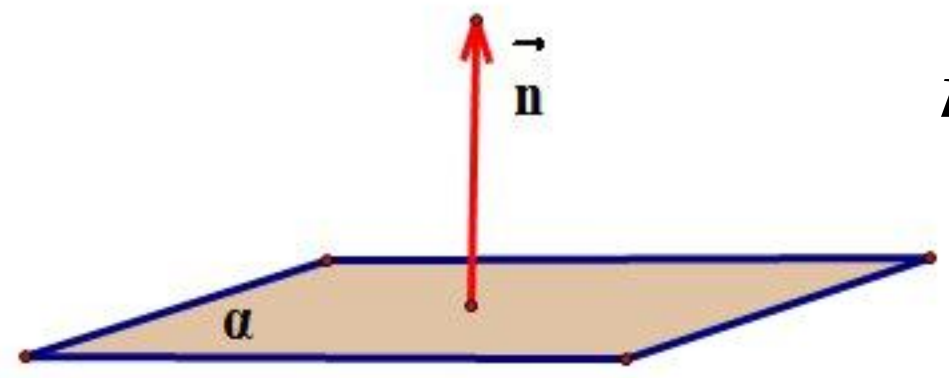
Для каждого рассмотренного многогранника задайте другую систему координат и запишите координаты каждой вершины этого многогранника.

Некоторые положения теории координатного метода

$\vec{n}$

1. Уравнение плоскости имеет вид $ax+by+cz+d=0$

- **В этом уравнении плоскости коэффициенты – координаты вектора нормали к плоскости** (то есть вектора, перпендикулярного плоскости).



$$\vec{n}(a, b, c)$$

Составление уравнения плоскости

- Теорема. Пусть даны координаты трех точек, через которые надо провести плоскость: $M = (x_1, y_1, z_1)$; $N = (x_2, y_2, z_2)$; $K = (x_3, y_3, z_3)$. Тогда уравнение этой плоскости можно записать через определитель:
- $$\begin{vmatrix} \mathrm{x} - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ \mathrm{x}_1 - \mathrm{x}_0 & y_{1-}y_0 & z_1 - z_0 \\ \mathrm{x}_2 - \mathrm{x}_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0$$

Правило Саррюса

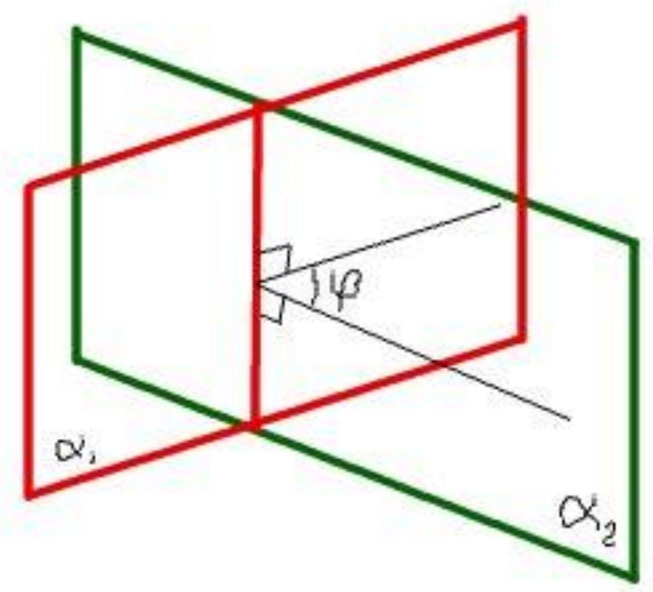
Метод дописывания двух столбцов.

- Этот способ вычисления определителя третьего порядка заключается в дописывании первых двух столбцов определителя и нахождении суммы произведений по главной диагонали и параллелях к ней за вычетом суммы произведений побочной диагонали и параллелях к ней, т.е.

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} -$$

$$- a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$$

2. Угол между плоскостями



Величина двугранного угла измеряется величиной соответствующего линейного угла. Чтобы построить **линейный угол двугранного угла**, нужно взять на линии пересечения плоскостей произвольную точку, и в каждой плоскости провести к этой точке луч перпендикулярно линии пересечения плоскостей. **Угол, образованный этими лучами и есть линейный угол двугранного угла:** φ

- 3. **Величиной угла между плоскостями называется величина меньшего двугранного угла.**
- Пусть плоскости α_1 и α_2 заданы уравнениями:

$$\alpha_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d = 0$$
$$\alpha_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d = 0$$

4. Косинус угла между плоскостями находится по формуле:

$$\cos\varphi = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

- В ответе записывается $|\cos\varphi|$, так как величиной угла между плоскостями называется величина **меньшего** двугранного угла.

5. Расстояние от точки M(x_0;y_0;z_0)до плоскости ax + by + cz + d = 0.

$$\rho\left(M;\alpha\right)=\frac{\left|ax_0+by_0+cz_0+d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Например:

$M\left(-3;1;2\right)$ $\qquad 3x+4y-12z+2=0$

$$\rho\left(M;\alpha\right)=\frac{\left|3\cdot\left(-3\right)+4\cdot1-12\cdot2+2\right|}{\sqrt{3^2+4^2+\left(-12\right)^2}}=\frac{27}{13}$$

6. Уравнение плоскости, проходящей через три точки

$M\left(x_m; y_m; z_m\right)$

$N\left(x_n; y_n; z_n\right)$

$P\left(x_p; y_p; z_p\right)$

Уравнение плоскости имеет вид

$$ax + by + cz + d = 0$$

Числа **a, b, c** находим из системы уравнений

$$\begin{cases} ax_m + by_m + cz_m + d = 0 \\ ax_n + by_n + cz_n + d = 0 \\ ax_p + by_p + cz_p + d = 0 \end{cases}$$

Например: ***Написать уравнение плоскости, проходящей через точки*** $M(0;1;0)$ $N(1;0;0)$ $P(1;1;1)$

$$ax+by+cz+d=0$$

$$\begin{cases} a\cdot 0+b\cdot 1+c\cdot 0+d=0 \\ a\cdot 1+b\cdot 0+c\cdot 0+d=0 \\ a\cdot 1+b\cdot 1+c\cdot 1+d=0 \end{cases}$$

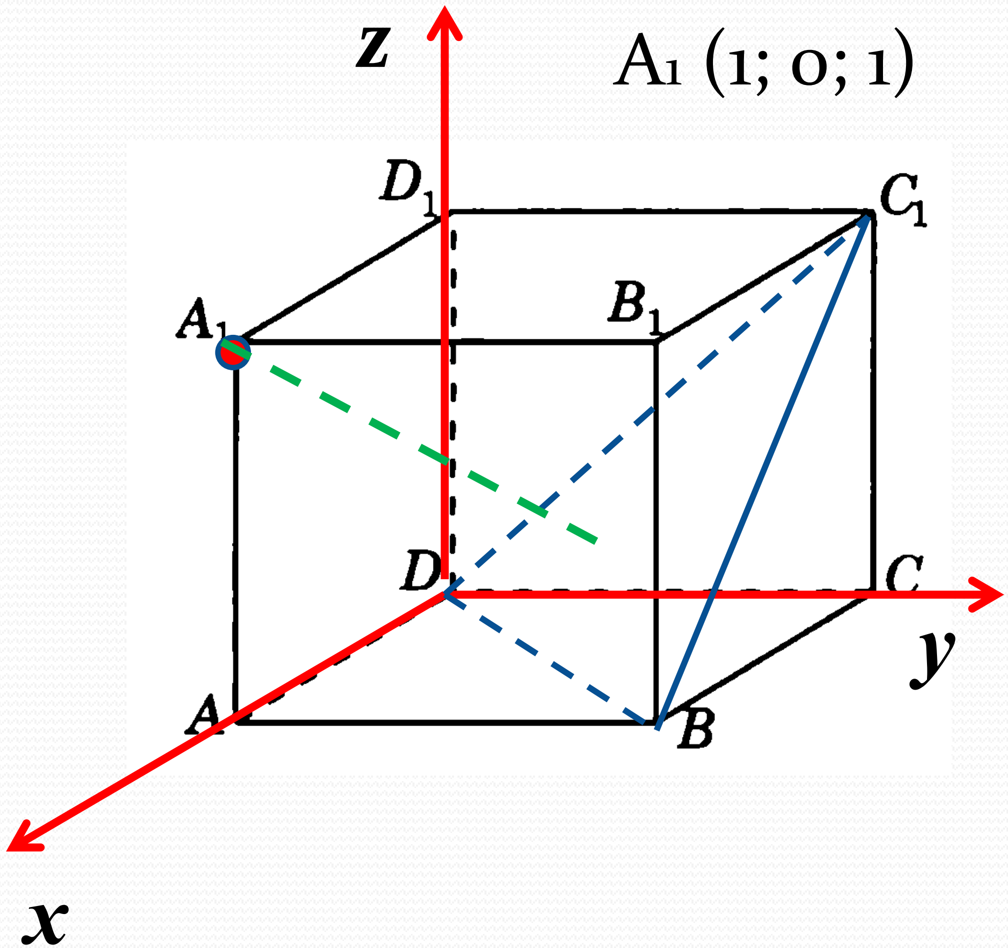
$$\begin{cases} b+d=0 \\ a+d=0 \\ a+b+c+d=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} b=-d \\ a=-d \\ -d-d+c+d=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} b=-d \\ a=-d \\ c=d \end{cases}$$

$$-dx-dy+dz+d=0 \,/ : (-d)$$

$$x+y-z+1=0$$

- уравнение плоскости, проходящей через три данные точки.

№ 1. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние от точки A_1 до плоскости (BDC_1) .



A_1 (1; 0; 1)

D (0; 0; 0)

B (1; 1; 0)

C_1 (0; 1; 1)

Запишем уравнение плоскости DBC_1.

$$ax + by + cz + d = 0$$

$$\begin{cases} a\cdot 0 + b\cdot 0 + c\cdot 0 + d = 0 \\ a\cdot 1 + b\cdot 1 + c\cdot 0 + d = 0 \\ a\cdot 0 + b\cdot 1 + c\cdot 1 + d = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} d = 0 \\ a + b + d = 0 \\ b + c + d = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} d = 0 \\ a = -b \\ c = -b \end{cases}$$

$$-bx + by - bz = 0 \;/ : (-b)$$

$$x - y + z = 0$$

Найдем искомое расстояние по формуле

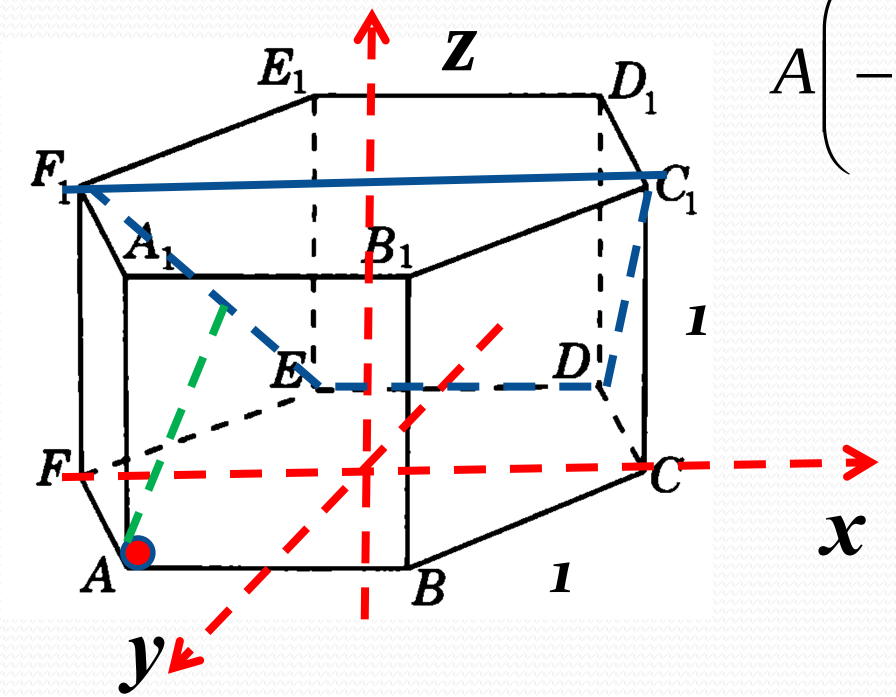
A_1 (1; 0; 1)

$$\rho(M;\alpha) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$\rho(A_1;(BC_1D)) = \frac{|1\cdot 1 - 1\cdot 0 + 1\cdot 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Ответ: $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

№ 2. В правильной шестиугольной призме все ребра равны 1. Найдите расстояние от точки А до плоскости (DEF1)



$A\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$

$C_1\ (1;\ 0;1)$

$D\left(\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$

$F_1\ (-\ 1;\ 0;1)$

Запишем уравнение плоскости DC_1F_1.

$$ax+by+cz+d=0$$

$$\begin{cases} a\cdot 1+b\cdot 0+c\cdot 1+d=0 \\ a\cdot \frac{1}{2}+b\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+c\cdot 0+d=0 \\ a\cdot(-1)+b\cdot 0+c\cdot 1+d=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underline{a+c+d=0} \\ \frac{1}{2}a-\frac{\sqrt{3}}{2}b+d=0 \\ \underline{-a+c+d=0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=0 \\ c=-d \\ b=\frac{2}{\sqrt{3}}d \end{cases}$$

$$0\cdot x+\frac{2}{\sqrt{3}}dy-dz+d=0 \Big/ :d$$

$$\frac{2}{\sqrt{3}}y-z+1=0$$

Найдем искомое расстояние по формуле $\rho(M;\alpha)=\dfrac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

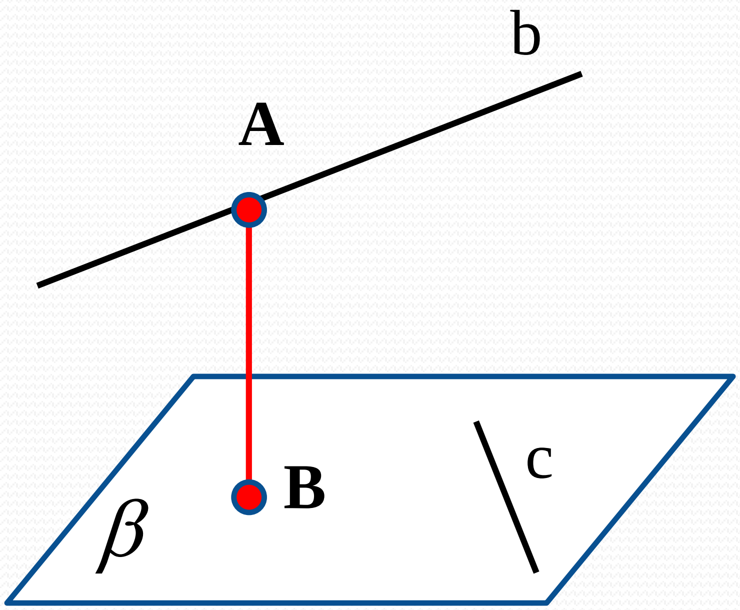
$$0\cdot x+\frac{2}{\sqrt{3}}y-z+1=0$$

$$A\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$$

$$\rho(A;(DC_1F_1))=\frac{\left|0\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-1\cdot 0+1\right|}{\sqrt{0^2+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2+(-1)^2}}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$$

Ответ: $\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$

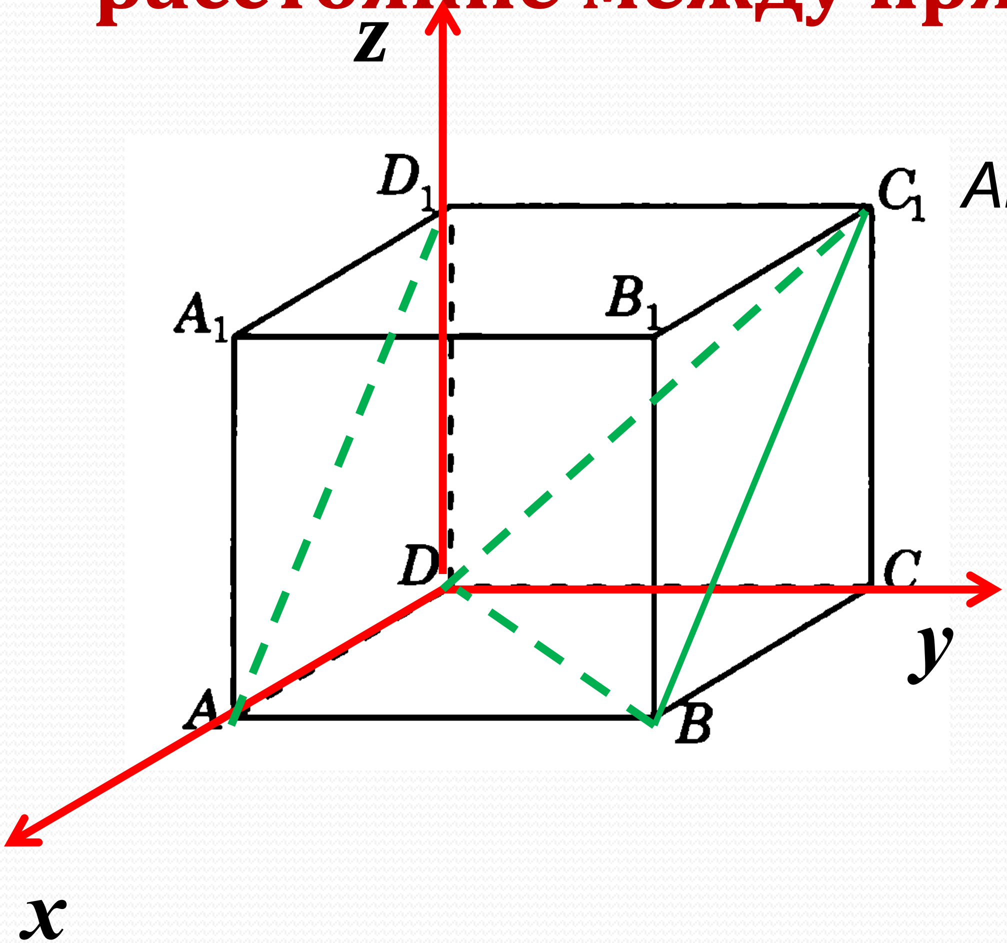
Расстоянием между скрещивающимися прямыми называется расстояние между одной из скрещивающихся прямых и плоскостью, проходящей через вторую прямую, параллельно первой.



$b \parallel \beta$

$$\rho(b;c)=\rho(b;\beta)=\rho(A;\beta)$$

№ 3. В единичном кубе найдите расстояние между прямыми AD1 и BD.



$AD_1 \parallel BC_1; \ AD_1 \parallel (DBC_1)$

$$\rho(AD_1; BD) =$$

$$\rho(AD_1; (BDC_1)) =$$

$$\rho(A; (BDC_1))$$

A (1; 0; 0)

D (0; 0; 0)

B (1; 1; 0)

C_1 (0; 1; 1)

Запишем уравнение плоскости BDC_1.

$$ax + by + cz + d = 0$$

$$\begin{cases} a\cdot 0 + b\cdot 0 + c\cdot 0 + d = 0 \\ a\cdot 1 + b\cdot 1 + c\cdot 0 + d = 0 \\ a\cdot 0 + b\cdot 1 + c\cdot 1 + d = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} d = 0 \\ a = -b \\ c = -b \end{cases}$$

$$-bx + by - bz = 0$$

$$x - y + z = 0$$

Найдем искомое расстояние по формуле

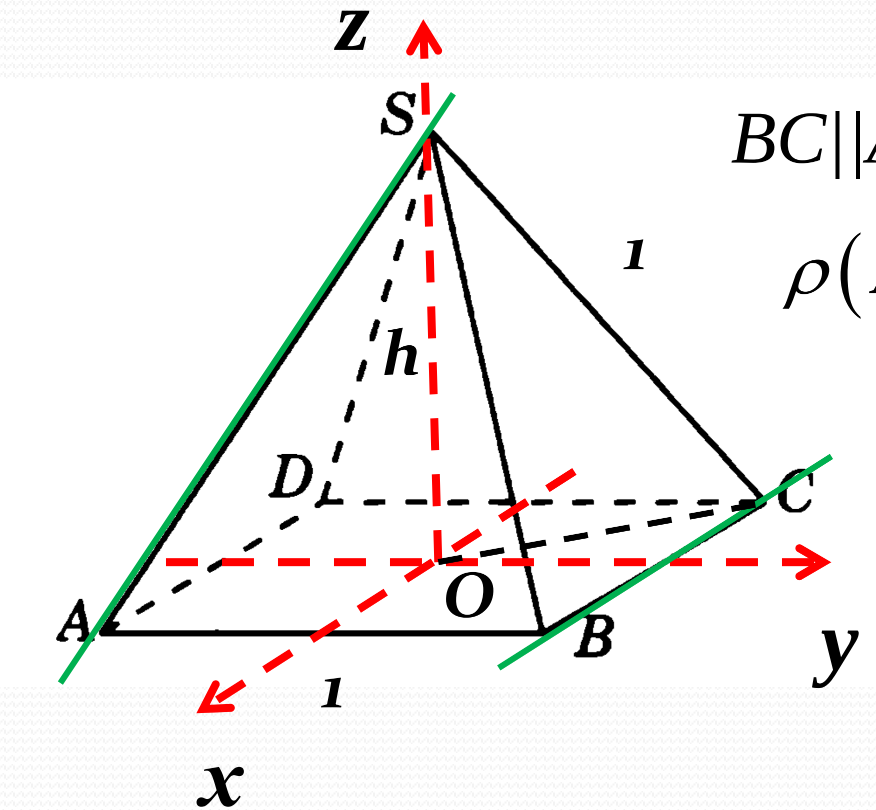
$$\rho(M;\alpha) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

A (1; 0; 0) $x - y + z = 0$

$$\rho\left(A;(BC_1D)\right) = \frac{|1\cdot 1 - 1\cdot 0 + 1\cdot 0|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3}$

№ 4. В правильной четырехугольной пирамиде SABCD все ребра равны 1. Найдите расстояние между прямыми AS и BC.



$BC \| AD$; $BC \,\|\, (ADS)$

$$\rho(AS; BC) = \rho(BC; (ADS)) =$$

$$= \rho(B; (ADS))$$

$AC = \sqrt{2}$ $OC = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$$h = \sqrt{1^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$B\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right) \quad A\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2};0\right) \quad S\left(0;0;\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad D\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{2};0\right)$$

Запишем уравнение плоскости ADS.

$$\begin{cases} a\cdot\frac{1}{2}-b\cdot\frac{1}{2}+c\cdot 0+d=0 \\ a\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-b\cdot\frac{1}{2}+c\cdot 0+d=0 \\ a\cdot 0+b\cdot 0+c\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+d=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b+d=0 \\ -\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b+d=0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}c+d=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = 2d \\ c = -\sqrt{2}d \end{cases}$$

$$0 \cdot x + 2dy - \sqrt{2}dz + d = 0 \quad \Big/ : d$$

$$0 \cdot x + 2y - \sqrt{2}z + 1 = 0$$

Найдем искомое расстояние по формуле

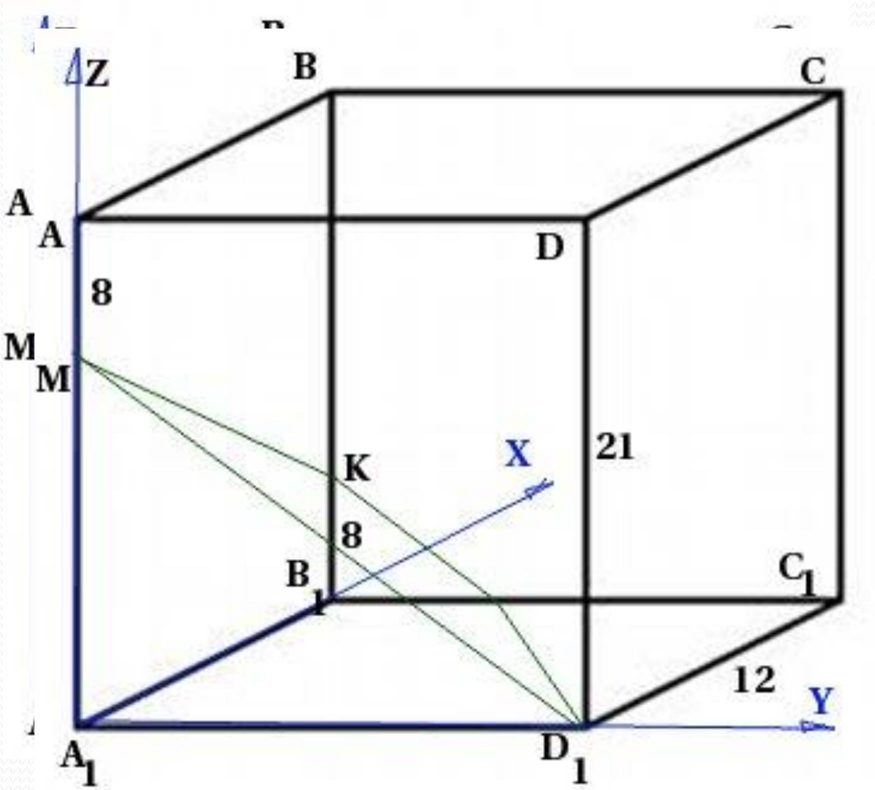
$$\rho(M;\alpha) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$B\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right)$$

$$\rho\big(B;(ASD)\big) = \frac{\left|0 \cdot \dfrac{1}{2} + 2 \cdot \dfrac{1}{2} + \sqrt{2} \cdot 0 + 1\right|}{\sqrt{0^2 + 2^2 + \left(-\sqrt{2}\right)^2}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

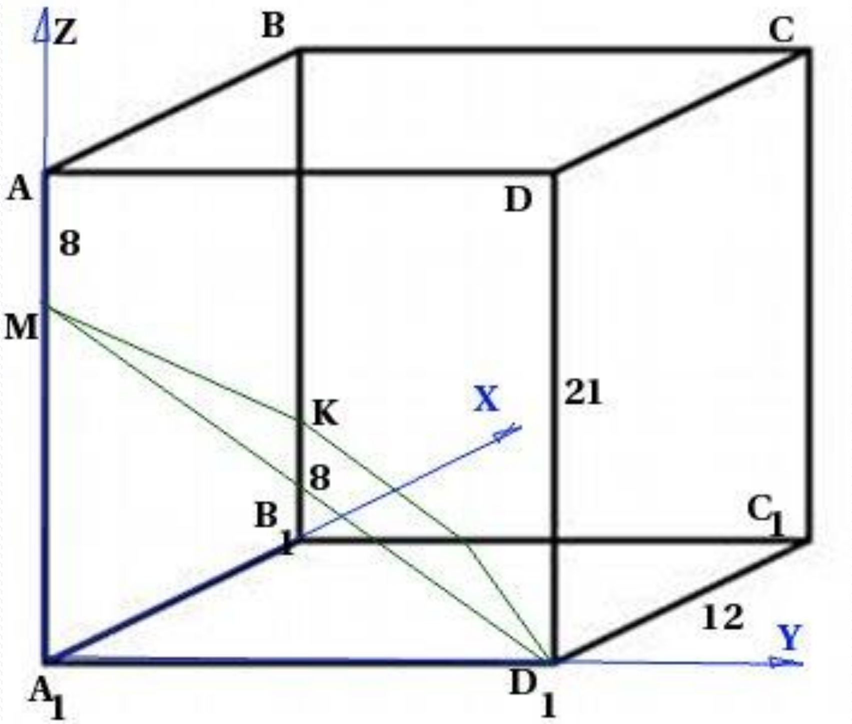
Ответ: $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

Задача (ЕГЭ-2012).



- В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ со стороной основания 12 и высотой 21 на ребре AA_1 взята точка M так, что AM=8 . На ребре BB_1 взята точка K так, что $B_1K = 8$. Найдите угол между плоскостью D_1MK и плоскостью CC_1D_1 .

Решение.



Запишем координаты точек:

М(0;0;13),К(12;0;8), $D_1(0;12;0)$

Подставим их в систему уравнений:

$$\begin{cases} 0\times A+0\times B+13C+1=0 \\ 12A+0\times B+8C+1=0 \\ 0\times A+12B+0\times C+1=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 13C+1=0 \\ 12A+8C+1=0 \\ 12B+1=0 \end{cases}$$

Отсюда:

C= -1/13, B= -1/12, A= -5/(12x13).

Подставим найденные коэффициенты в уравнение плоскости:

$$5x+13y+12z-156=0$$

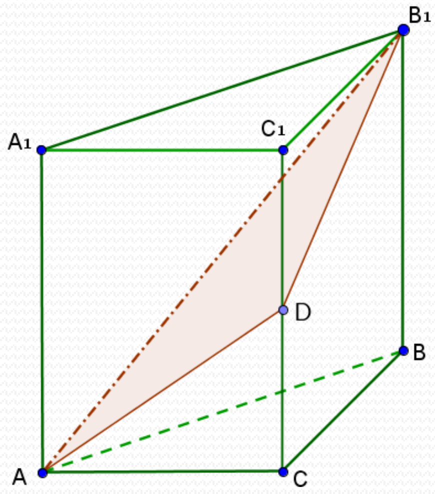
$$Аналогично, C(12;12;21), C_1(12;12;0), D_1(0;12;0)$$

$$\begin{cases} 12A+12B+1=0, \\ 12B+1=0, \\ 12A+12B+21C+1=0 \end{cases} \quad \begin{cases} A=0, \\ C=0, \\ B=-\dfrac{1}{12}. \end{cases} \quad \frac{-1}{12}y+1=0,\ y-12=0.$$

Подставим их в формулу для нахождения косинуса угла между плоскостями, и найдем угол:

$$cos\varphi=\frac{5\cdot 0+13\cdot 1+12\cdot 0}{\sqrt{5^2+13^2+12^2}\cdot\sqrt{1}}=\frac{13}{13\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}. \qquad \varphi=45^0$$

Урок одной задачи – творческое закрепление методов решения задач типа С2



Задание С2 ЕГЭ 2012 г.

- В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ стороны основания равны 1, а боковые ребра равны 4. На ребре AA_1 отмечена точка E так, что $AE:EA_1 = 3:1$. Найдите угол между плоскостями ABC и BED_1.

Ответ: $\operatorname{arctg}\sqrt{10}$.

Литература :

- *Корянов А.Г., Прокофьев А.А. Многогранники: типы задач и методы их решения:* www.abiturient
- *Геометрия. Расстояния и углы в пространстве /И.М.Смирнов, В.А.Смирнов. - 3-е изд., перераб. и доп. – М.:Издательство «Экзамен»,2011. – 158 с.*
- *Задание С2: Решаем методом координат / И.Беликова. – Математика, приложение «Первое сентября», №20, 2010.*
- www.alexlarin.narod.ru
  - http://ege-ok.ru/
  - http://nsportal.ru/

Для подготовки следующего вебинара присылайте вопросы

skipkro_itido@mail.ru

Черноусенко Т.И. вопросы для вебинара